

**CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA CELSO SUCKOW DA  
FONSECA**

**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA  
BACHARELADO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**Arthur Ferraz de Almeida Couto**

**Proposta de modelagem do comportamento vibracional de ferramentas  
longas durante o torneamento interno**

**TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO**

**RIO DE JANEIRO  
2021**

**Arthur Ferraz de Almeida Couto**

**Proposta de modelagem do comportamento vibracional de ferramentas longas durante o torneamento interno**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial à obtenção do título de Bacharel em Engenharia Mecânica, do Departamento de mecânica, do Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca.

Orientador: Prof. Dr. Fernando da Silva Ribeiro

**RIO DE JANEIRO  
2021**

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central do CEFET/RJ

C871 Couto, Arthur Ferraz de Almeida  
Proposta de modelagem do comportamento vibracional de  
ferramentas longas durante o torneamento interno / Arthur Ferraz  
de Almeida Couto – 2021.  
60f.: il. color. + anexos, enc.

Projeto Final (Graduação) Centro Federal de Educação  
Tecnológica Celso Suckow da Fonseca, 2021.  
Bibliografia: f. 58-60  
Orientador: Fernando da Silva Ribeiro

1. Engenharia mecânica. 2. Torneamento. 3. Vibração.  
4. Usinagem – Pesquisa. 5. Engenharia – Modelos matemáticos.  
6. Fourier, Séries de. I. Ribeiro, Fernando da Silva (Orient.).  
II. Título.

CDD 620.1

Dedico este trabalho a todos que me apoiaram e me deram energia para não desistir e seguir em frente até o final, à minha família, amigo e cônjuge.

## **AGRADECIMENTOS**

Dedico este espaço do trabalho para enfatizar a minha gratidão perante todas as pessoas que me apoiaram nessa trajetória longa de graduação, culminando no seu fim neste trabalho de conclusão.

Agradeço meus pais e meus irmãos por todo o ensinamento, apoio, confiança e respeito que transbordam em minha vida desde o momento do meu nascimento. Agradeço por sempre reforçarem que acreditam em mim em todos os meus momentos.

Agradeço à minha namorada Fabiana, pelo amor, confiança e paciência.

Agradeço ao Prof. Dr. Fernando da Silva Ribeiro, pela paciência, conhecimento e orientação que permitiu esse trabalho.

Agradeço a instituição CEFET, pelos anos de estudo e aprimoramento profissional.

Enfim, a todos que contribuíram para realização deste trabalho.

## RESUMO

COUTO, Arthur Ferraz de Almeida. **Proposta de modelagem do comportamento vibracional de ferramentas longas durante o torneamento interno**. 2021. 75 Páginas. Trabalho de Conclusão de Curso – Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca. Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2021.

O conceito de vibrações em torneamento é de grande importância na indústria mecânica devido ao impacto que o comportamento vibratório descontrolado pode gerar na cadeia produtiva e na geração de prejuízo. Com isso, se mostra interessante qualquer abordagem que almeje analisar e compreender os mecanismos que regem tal fenômeno. Nesse estudo serão apresentados os conceitos de vibrações e torneamento e como eles se conectam, além de buscar uma interpretação da rugosidade superficial do material a ser usinado e seus efeitos, ao mesmo tempo que apresenta as equações de governo para a ferramenta de acordo com os conceitos de dinâmica de estrutura. Busca-se desenvolver uma proposta de modelagem para um sistema vibratório em torneamento interno.

**Palavras-chave:** Torneamento. Vibrações. Numérica. Análise. Longa. Fourier.

## ABSTRACT

COUTO, Arthur Ferraz de Almeida. **Proposal for modeling the vibrational behavior of long tools during internal turning**. 2021. 75 pages. Trabalho de Conclusão de Curso - Federal Center of Technological Education – Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2021.

The concept of vibrations in turning is of great importance in the mechanical industry due to the impact that uncontrolled vibratory behavior can generate in the production chain and in generating losses. Thus, any approach that aims to analyze and understand the mechanisms that govern this phenomenon is interesting. In this study, the concepts of vibration and turning and how they are connected will be presented, in addition to seeking an interpretation of the surface roughness of the material to be machined and its effects, while presenting the governing equations for the tool according to the concepts of structure dynamics. The aim is to develop a modeling proposal for a vibratory system in internal turning.

**Keywords:** Turning. Vibrations. Numerical. Analysis. Long. Fourier

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Tipos de operações de torneamento .....	12
Figura 2 - Esquema visual dos movimentos durante o torneamento .....	13
Figura 3 - Demonstração da posição vetorial das forças.....	15
Figura 4 – Representação de um sistema massa-mola-amortecedor .....	18
Figura 5 – Modelo de oito graus de liberdade de um veículo .....	19
Figura 6 – Exemplo do “lançamento” de ferramentas para torneamento .....	22
Figura 7 - Demonstração do ângulo de posição.....	23
Figura 8 – Demonstração do ângulo de entrada .....	23
Figura 9 – Formação de cavaco por V. Gutakovskis et al (2011).....	25
Figura 10 – Modelo para barra mono engasta .....	26
Figura 11 – Modelo de para ferramenta de torneamento interno .....	28
Figura 12 – Formação de cavaco.....	28
Figura 13 – Exemplo de Perfilômetro com ponta de diamante.....	32
Figura 14 – Ilustração do erro associado a geometria da ponta.....	33
Figura 15 – Ilustração dos perfis de uma medida de superfície .....	34
Figura 16 – Perfil e espectro de amplitude .....	37
Figura 17 – Definição de aspereza por Aramaki .....	38
Figura 18 – Aproximação pelo método Aramaki.....	38
Figura 19 – Aproximação pelo Método dos quadrados mínimos.....	39
Figura 20 – Gráfico da rugosidade aproximada através do OCTAVE .....	42
Figura 21 – Rugosidade por Séries de Fourier (onda quadrada) .....	44
Figura 22 - Suporte interno para torneamento .....	45
Figura 23 - Representação do sistema mecânico .....	47
Figura 24 - DCL do sistema teórico com dois elementos de viga plana .....	48
Figura 25 – Ilustração dos modos de vibração da ferramenta.....	55



## **Lista de Tabelas**

Tabela 1 – Banda de transmissão $\lambda_c$ .....	33
Tabela 2 – Simbologia, equivalência e processos de usinagem .....	35
Tabela 3 – Frequências naturais do sistema.....	54
Tabela 4 – Modos de vibrar da ferramenta.....	54

## SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO</b> .....	<b>10</b>
<b>2. TORNEAMENTO E ESFORÇO DE CORTE</b> .....	<b>11</b>
2.1. <a href="#">TORNEAMENTO</a> .....	11
2.2. <a href="#">MECÂNICA DA USINAGEM</a> .....	12
2.3. <a href="#">ESFORÇOS DE CORTE</a> .....	14
2.3.1. <a href="#">Plano Ortogonal de Corte e Suas Forças</a> .....	14
2.3.2. <a href="#">Cálculo de forças de corte</a> .....	15
<b>3. VIBRAÇÕES MECÂNICAS</b> .....	<b>18</b>
3.1. <a href="#">CONCEITOS BÁSICOS</a> .....	18
3.2. <a href="#">TIPOS DE VIBRAÇÃO</a> .....	20
3.3. <a href="#">PROCEDIMENTOS DE ANÁLISE</a> .....	20
3.4. <a href="#">VIBRAÇÕES EM TORNEAMENTO</a> .....	21
<b>4. MODELAGEM FÍSICA E ANALÍTICA</b> .....	<b>25</b>
4.1. <a href="#">REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</a> .....	25
4.2. <a href="#">ANÁLISE DO PROBLEMA PROPOSTO</a> .....	29
<b>5. DESENVOLVIMENTO E ANÁLISE DE RESULTADOS</b> .....	<b>31</b>
5.1. <a href="#">MODELO MATEMÁTICO PARA RUGOSIDADE SUPERFICIAL</a> .....	31
5.1.1. <a href="#">Equipamento de Medição</a> .....	31
5.1.2. <a href="#">Parâmetros</a> .....	34
5.2. <a href="#">EQUACIONAMENTO MODELO PARA RUGOSIDADE</a> .....	36
5.2.1. <a href="#">Modelo de E.G Thwaite (1981)</a> .....	36
5.2.2. <a href="#">Modelo de Sérgio Manuel (2005)</a> .....	37
5.2.3. <a href="#">Função Descritiva da Topografia da Superfície</a> .....	40
5.3. <a href="#">MODELO FÍSICO PARA FERRAMENTA</a> .....	45
5.4. <a href="#">Modelagem do sistema vibracional</a> .....	47
5.5. <a href="#">Análise de resultados</a> .....	52
5.5.1. <a href="#">Implementação em OCTAVE</a> .....	53
5.5.2. <a href="#">Resultados Obtidos</a> .....	53
<b>6 Considerações finais</b> .....	<b>56</b>
<b>Referências bibliográficas</b> .....	<b>58</b>
<b>ANEXO A</b> .....	<b>61</b>
<b>ANEXO B</b> .....	<b>63</b>
<b>ANEXO C</b> .....	<b>65</b>

## 1. INTRODUÇÃO

Neste trabalho serão apresentados estudos e conceitos visando explicar o entendimento básico do processo vibracional em torneamento interno e suas relações já estudadas com as propriedades materiais da peça e da ferramenta, sendo determinado um modelo simplificado para representar a ferramenta e a superfície do material.

Em seus primeiros capítulos, buscou-se realizar uma revisão bibliográfica dos conceitos que envolvem a operação de torneamento, definindo parametrização, equacionamento e terminologia; assim como os conceitos básicos que regem os fenômenos vibratórios que possam estar relacionadas com vibração em torneamento mecânico.

Uma análise de estudos referentes a modelagem analítica de operações de torneamento e vibrações mecânicas será apresentada com o intuito de demonstrar as diferentes aproximações ao assunto realizadas pelos autores e autoras, de maneira a convergir os conhecimentos em prol de definir uma modelagem própria de análise.

Tal modelo propõe uma versão simplificada de como estudar o comportamento vibratório de ferramentas durante a operação de usinagem, com o mínimo de recursos de medição instrumentada. Com isso, se mostrou interessante uma configuração do sistema vibratório utilizando a superfície a ser usinada e sua topografia como função base de excitação, sendo definido também a função do tempo que descreve a topografia.

A partir dos conceitos estudados sobre dinâmica das estruturas, será desenvolvido um modelo de representação para a ferramenta, através das equações de governo da estrutura apresentada. Dessa forma, será proposto um método de modelagem para o comportamento vibracional de uma ferramenta durante uma operação de torneamento interno

## 2. TORNEAMENTO E ESFORÇO DE CORTE

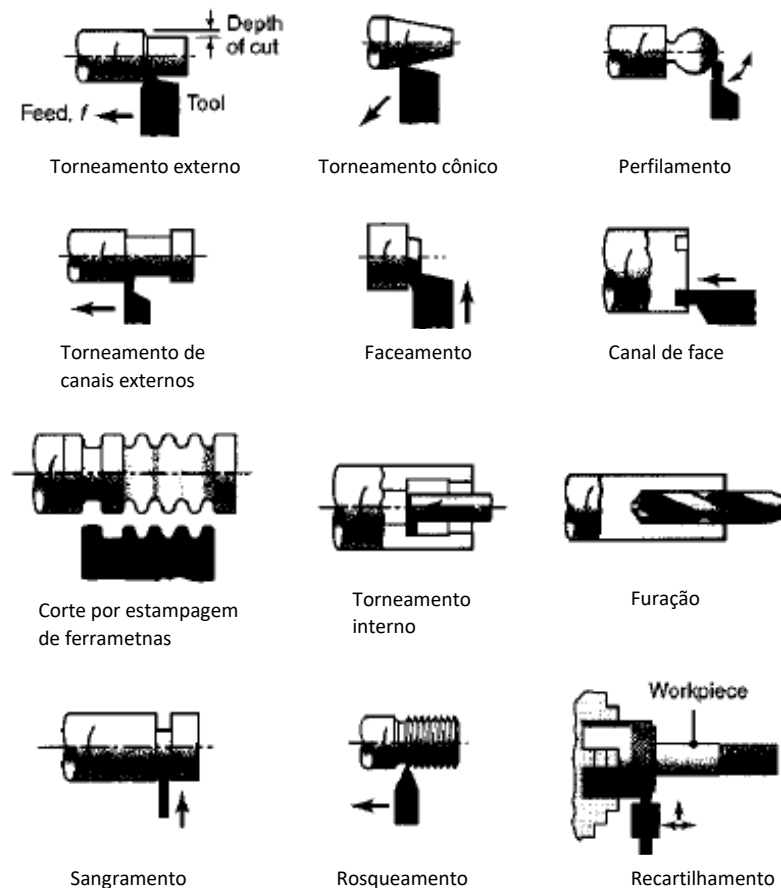
Neste capítulo serão apresentados alguns conceitos necessários para compreender como a operação de torneamento se relaciona com o comportamento vibratório e quais parametrizações referentes ao esforço de corte presente serão importantes para definir tal relação.

### 2.1. TORNEAMENTO

Considerando que o fenômeno de vibração estudado é intrínseco ao processo de usinagem de torneamento, se mostra imperativo realizar uma avaliação referente aos conceitos e equacionamentos já estudados através dos anos e com isso, entender com maior profundidade quais possíveis parâmetros de operação que possuem maior efetividade e impacto na intensidade do fenômeno.

Torneamento, segundo Kalpakjian (2009), é um processo que envolve o uso de uma ferramenta simples de ponta única onde ela é fixa e a peça gira em relação a primeira enquanto ocorre o corte, processando peças geralmente de perfil arredondado e vinda de outros processos de fabricação. Os tornos mecânicos são as máquinas atribuídas para realizar essa operação, sendo versáteis e capazes de confeccionar inúmeros formatos de peças através de diversas operações, como faceamento, perfilamento, mandrilhamento e furação. A figura 1 exemplifica tais operações.

Durante o corte, o movimento rotacional da peça com o avanço transversal da ferramenta realiza a remoção de material através de camadas. Profundidade de corte ( $a_p$ ), definindo a espessura da camada de material a ser retirada, e avanço de corte ( $f_a$ ), sendo a distância que a ferramenta caminha pela superfície da peça por unidade de revolução; são os parâmetros de máquina que constituem o esforço de corte exigido da ferramenta. A rotação da peça implica na velocidade de corte ( $v_c$ ), parâmetro também importante em relação às forças de corte.



**Figura 1 – Tipos de operações de torneamento**  
**Fonte: Serope Kalpakjian e Steven R. Schmid (2009)**

## 2.2. MECÂNICA DA USINAGEM

De acordo com Kalpakjian (2009), o princípio usado para qualquer máquina ferramenta com intuito de obter a superfície desejada seria promover um movimento relativo entre a matéria prima e a ferramenta escolhida. Tal movimento pode ser observado e estudado ao se verificar as grandezas físicas que o regem.

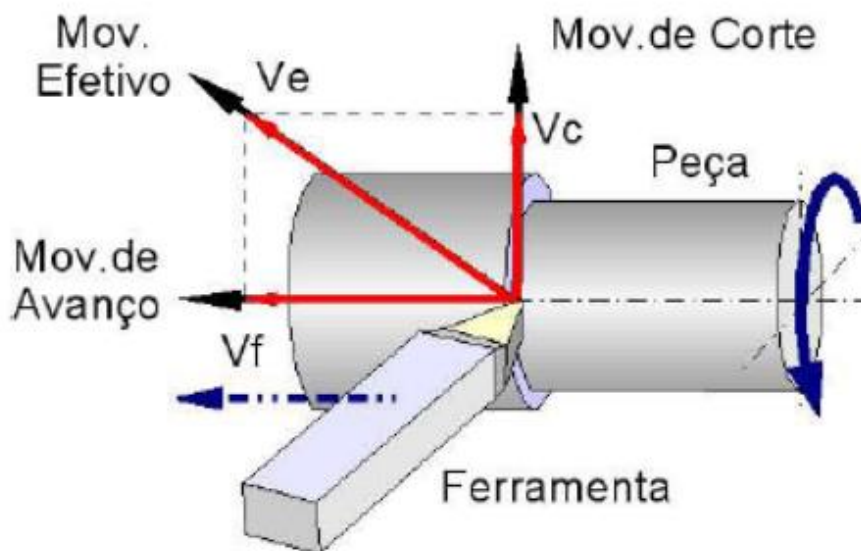
Para as definições e terminologias referentes aos processos de usinagem, a norma ABNT NBR 6162 (Movimentos e relações geométricas na usinagem de metais) se mostra completa ao abordar a formulação básica para os parâmetros de usinagem, como avanço e velocidade de corte, e para as grandezas de penetração de ferramentas, como profundidade de usinagem e penetração de ferramenta. Tais grandezas coordenam a relação entre

ferramenta e superfície da peça e a remoção de material, que definem os esforços de corte.

Conceitualmente, existem três movimentos importantes no processo de usinagem: corte, avanço e efetivo. Consistem na relação entre peça e ferramentas que causam efetivamente a retirada de material e a saída de cavaco, sendo então os movimentos que interagem no comportamento vibratório do sistema.

A NBR 6162 define cada um dos movimentos citados e exemplificados na figura 2:

- Movimento de corte: realizado entre a peça e a aresta de corte que produz a retirada de cavaco de maneira única, onde há ausência de avanço.
- Movimento de avanço: também realizado entre a peça e aresta de corte, porém produz a retirada contínua de cavaco quando aliado ao movimento de corte.
- Movimento efetivo: consiste no movimento resultante dos dois anteriores, promovendo a usinagem do material em si.



**Figura 2:** Esquema visual dos movimentos durante o torneamento externo. Análogo no caso de torneamento interno

Fonte: ([http://www.geocities.ws/cmovbr73/ProcFabr\\_Cap1\\_Introducao.pdf](http://www.geocities.ws/cmovbr73/ProcFabr_Cap1_Introducao.pdf)) (Acessado 2021)

## 2.3. ESFORÇOS DE CORTE

A relação dos parâmetros de corte, a geometria e movimento da ferramenta com as propriedades da peça a ser usinada, gera as grandezas que definem o esforço de corte. Como será visto mais a frente, o esforço de corte é diretamente relacionado com os efeitos vibracionais no torneamento.

Como descrito por Kalpakjian e Schmid (2009), dados adquiridos sobre esforços de cortes possuem extrema importância no processo de usinagem, pois, contemplam o desenvolvimento preciso de ferramental de corte para minimizar as distorções nos equipamentos de máquina, manter precisão dimensional e auxiliar na escolha dos suportes de ferramentas e dispositivos de fixação. Além disso, permitir que a peça a ser trabalhada resista aos mesmos esforços sem que haja distorções na mesma.

Se torna possível fazer uma comparação de que as distorções descritas podem compor deformações plásticas ou elásticas, tanto da peça quanto da ferramenta, sendo provável o efeito vibracional como resultado desse “deslocamento” gerado pela deformação. Através do dimensionamento do esforço de corte empregado em ambas as partes durante a usinagem, obter um parecer prévio de vibração é plausível.

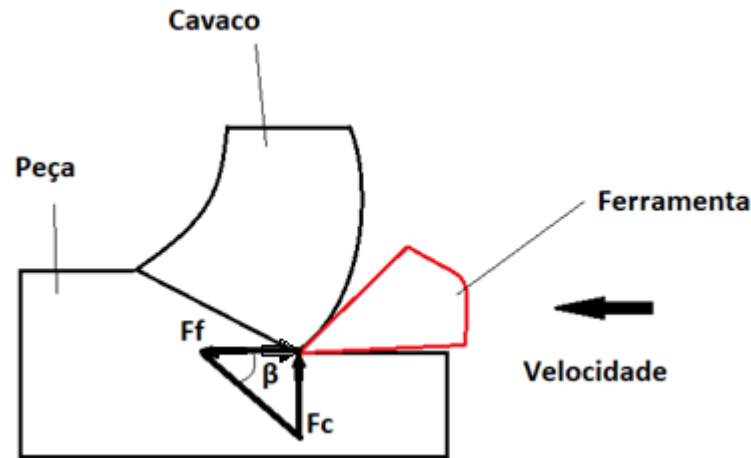
### 2.3.1. Plano Ortogonal de Corte e Suas Forças

Demonstrado por Machado et al (2009), com intuito de simplificar a compreensão de como as forças de corte atuam na área de corte, pode-se adotar um modelo de corte ortogonal, que reúne os componentes envolvidos na operação em um único plano denominado como plano de trabalho. O modelo bidimensional permite a análise vetorial das forças envolvidas na geração de cavaco e a atuação delas nos componentes envolvidos, sendo a ferramenta, peça e o próprio cavaco gerado.

Na teoria de usinagem de Machado et al (2009), existem duas componentes básicas na força de usinagem considerando o plano ortogonal:

- Força de corte principal ( $F_c$ ): definida como força realizada pela velocidade de corte, na direção do corte;

- Força de avanço ( $F_f$ ): definida como a força realizada pela velocidade de avanço da ferramenta, na direção do avanço;



**Figura 3: Demonstração da posição vetorial das forças empregadas no corte de material**  
**Fonte: Autor 2021**

Como mostrado na figura 3, a força resultante no processo de usinagem é definida pela soma vetorial de  $F_c$  e  $F_f$  e relacionando as projeções das forças com o ângulo  $\beta$ , o qual é definido como ângulo de fricção, aumentando e diminuindo de acordo com os parâmetros de corte aplicados.

### 2.3.2. Cálculo de forças de corte

A literatura que abrange a teoria de usinagem, define de maneira completa os equacionamentos teóricos para o cálculo de variáveis envolvidas no processo de usinagem. Entretanto, visando uma abordagem mais prática e mais bem conectada com os esforços necessários para causar perturbações vibracionais no sistema, será abordado com maior ênfase a força de corte.

De acordo com Machado et al, a força de corte pode ser descrita pelas equações (2.1) e (2.2):

$$F_c = k_s * A \quad (2.1)$$

$$A = a_p * f \quad (2.2)$$

Onde,

- $k_s$  - pressão de corte específica,
- $A$  - área da seção transversal de corte,



- $a_p$  – profundidade de corte,
- $f$  - avanço por rotação,

A pressão de corte específica ( $k_s$ ) é um valor definido geralmente de acordo com o material da peça a ser usinada, relacionado com a força necessária para se remover uma área de corte equivalente a  $1 \text{ mm}^2$ . Existe equacionamento para cálculo teórico da pressão de corte definido pela literatura, porém se torna mais prático para a análise proposta utilizar o equacionamento proposto pelas fabricantes de ferramentas, como SANDVIK e MITSUBISHI, e as tabelas fornecidas contendo os valores empíricos de  $k_s$  definidos por material da peça de trabalho.

As equações (2.3) e (2.4) abaixo, retirada das informações técnicas do catálogo SANDVIK, considera a denominação de força tangencial para o cálculo de esforço de corte na ferramenta. A equação adiciona a equação (2.1) e utiliza constantes para os materiais em geral:

$$F_t = k_s * \left( \frac{0.4}{f * \text{sen}(KAPR)} \right)^{m_c} * f * a_p \quad (2.3)$$

$$F_t = k_s * \left( \frac{0.4}{f} \right)^{0.29} * f * a_p \quad (2.4)$$

Onde,

- $k_s$ – força de corte específica
- $KAPR$  – ângulo de posição de ferramenta.
- $m_c$  – expoente constante definido pelo material.

A força específica de corte considerada na fórmula tem seus valores definidos na tabela 1, retirada do catálogo MITSUBISHI (2020-2021), a qual contém valores definidos para uma faixa de avanços por rotação. Para aplicação na fórmula (2.3) é necessário utilizar os valores para avanço de  $0.4 \text{ mm/rev}$ . O ângulo  $KAPR$  quando for acima de  $75^\circ$ , pode ser considerado como um seno igual a 1 e permitindo o uso da fórmula simplificada (2.4). O expoente  $m_c$  é convencionado pela SANDVIK como  $0,29$  para os materiais em geral.

O cálculo da força tangencial ou de corte definido acima permite obter o valor do esforço aplicado na ferramenta e na peça durante a usinagem, sendo essa a componente que afeta o comportamento vibracional forçado diretamente. No próximo capítulo será abordado a correlação entre a força descrita nos equacionamentos de vibrações forçadas.

### 3. VIBRAÇÕES MECÂNICAS

#### 3.1. CONCEITOS BÁSICOS

Pela definição de Singiresu RAO (2009), vibração é qualquer movimento repetitivo observado dentro de um intervalo de tempo, como o balançar de um pêndulo. O estudo de vibrações em equipamentos mecânicos possui grande importância devido aos efeitos catastróficos que podem causar, sem aviso prévio perceptível pelas partes operatrizes da máquina.

Em geral, os sistemas vibratórios são constituídos por três componentes principais: um elemento de massa que representa o armazenamento de energia cinética, um elemento mola que representa o armazenamento de energia potencial elástica e um elemento amortecedor que representa um meio de dissipação de energia do sistema de maneira gradual.

Com isso, o fenômeno vibratório consiste na transferência alternada de energia cinética para potencial do elemento massa para o elemento mola do sistema, e vice-versa, com o elemento amortecido atuando como dissipador em cada ciclo (mostrado na figura 4).

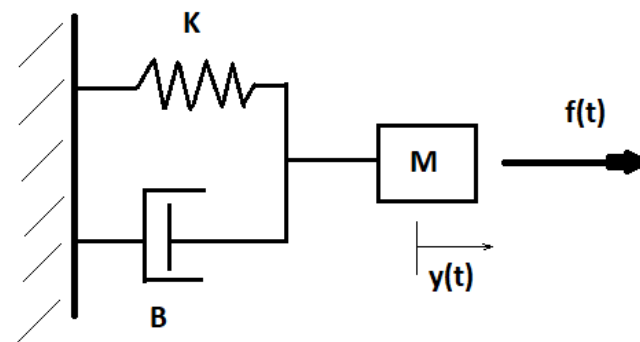
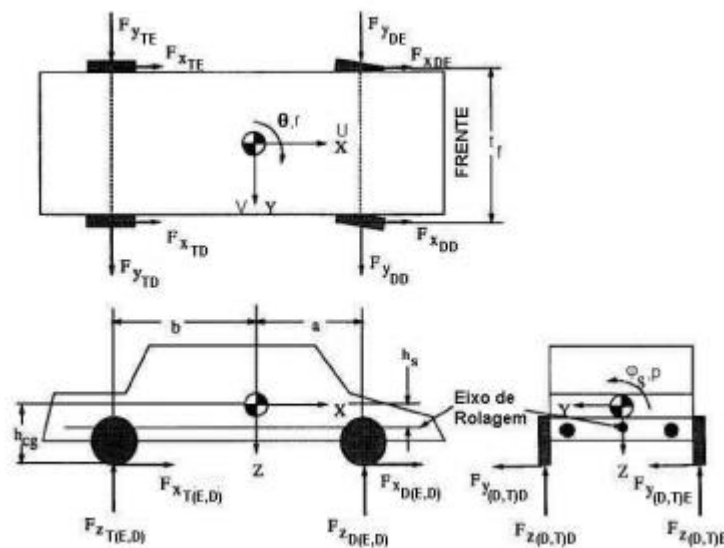


Figura 4 – Representação de um sistema massa-mola-amortecedor  
Fonte: Própria 2021

Um conceito importante abordado por Singiresu (2009) se refere aos graus de liberdade de um sistema. Por definição, “o número de coordenadas independentes para determinar completamente as posições de todas as partes de um sistema” consiste no número de graus de liberdade. A atribuição desse número pode ser mutável, considerando as simplificações realizadas em um

sistema mecânico complexo, como por exemplo, um veículo motorizado de quatro rodas com ocupantes.

Nesse caso, pode-se considerar o movimento individual de cada roda no eixo vertical, o movimento vertical da massa do ocupante, a posição do chassi em cada direção ortogonal e até o movimento do motor como graus de liberdade em cada movimento, obtendo-se um total expressivo de graus de liberdade (mostrado na FIGURA 5). Dessa forma o sistema se torna muito complexo para análise ao mesmo tempo que mais preciso, porém necessitando de ferramentas de cálculo tão complexas quanto. Se torna então aceitável a simplificação dos sistemas para fins de análise.



**Figura 5 – Modelo de oito graus de liberdade de um veículo**  
 Fonte: Alexandre de Lima Spinola ([https://www.maxwell.vrac.puc-rio.br/5109/5109\\_5.PDF](https://www.maxwell.vrac.puc-rio.br/5109/5109_5.PDF))(Acessado 2021)

Segundo RAO (2009), o equacionamento para descrever o equilíbrio dinâmico de um sistema vibracional está expresso em:

$$M\ddot{u} + B\dot{u} + Ku = F(t) \quad (3.1)$$

Na equação (3.1), M configura a matriz de massa do sistema, B a matriz de amortecimento e K a matriz de rigidez; F(t) descreve o vetor de excitações externas ao sistema, compondo forças de excitação (periódicas ou não) e o efeito da excitação de base. A componente u e suas derivadas  $\dot{u}$  e  $\ddot{u}$

descrevem o deslocamento, velocidade e aceleração dos graus de liberdade do sistema.

Através de software numéricos como OCTAVE e Matlab é possível resolver a equação diferencial de um sistema (3.1) e obter os autovetores e autovalores, conceitos que representam os modos de vibrar e as frequências naturais no movimento vibratório. A vibração se torna mais perigosa para o sistema quando a frequência referente ao vetor  $F(t)$  se aproxima da frequência natural, sendo definida ressonância quando se igualam.

### 3.2. TIPOS DE VIBRAÇÕES

Após a definição dos graus de liberdade que serão considerados no modelo sistema vibracional, mostra-se imperativo identificar os esforços envolvidos no sistema e definir em qual categoria ele se estabelece. Dessa forma é possível ter uma visão antecipada de como o sistema poderá se comportar durante a análise vibracional.

De acordo com Singiresu (2009), dois tipos principais de vibrações são categorizados referente à aplicação de forças, vibração livre e forçada; duas categorias que contemplam a ação de amortecimento, amortecida ou não; duas para separar a linearidade do fenômeno em seus componentes, linear ou não linear; e finalmente dependendo da possibilidade de previsão da vibração, determinística ou aleatória. Para este projeto, que será mais bem detalhado com o modelo físico, pode-se adiantar que será uma vibração forçada não amortecida.

### 3.3. PROCEDIMENTO DE ANÁLISE

Singiresu (2009) também define um passo a passo para análise de comportamentos vibratórios, considerando que as variáveis de entrada e saída são dependentes do tempo. Como dito anteriormente, ao realizar uma análise matemática de vibração, os sistemas vibracionais podem se mostrar muito complexos e por isso só algumas características são contempladas nos cálculos, visando a simplificação.

A primeira etapa de análise é a modelagem matemática ou física, que compõe a representação das variáveis e permitirá obter as equações analíticas que retratam o comportamento do sistema. A literatura indica que o modelo precisa conter detalhes suficientes para demonstrar o movimento vibratório sem torná-lo muito complexo.

Na segunda etapa, realiza-se a derivação do equacionamento obtido com o modelo criado na etapa um. Os diagramas de corpo livre de cada massa envolvida, isolando-as com os esforços nelas aplicadas (externas, inerciais e reativas), permitem analisar a correlação entre os elementos. A aplicação dos conhecimentos de dinâmica na modelagem permite gerar o equacionamento de governo do sistema, provenientes da análise dos diagramas, as quais são equações diferenciais.

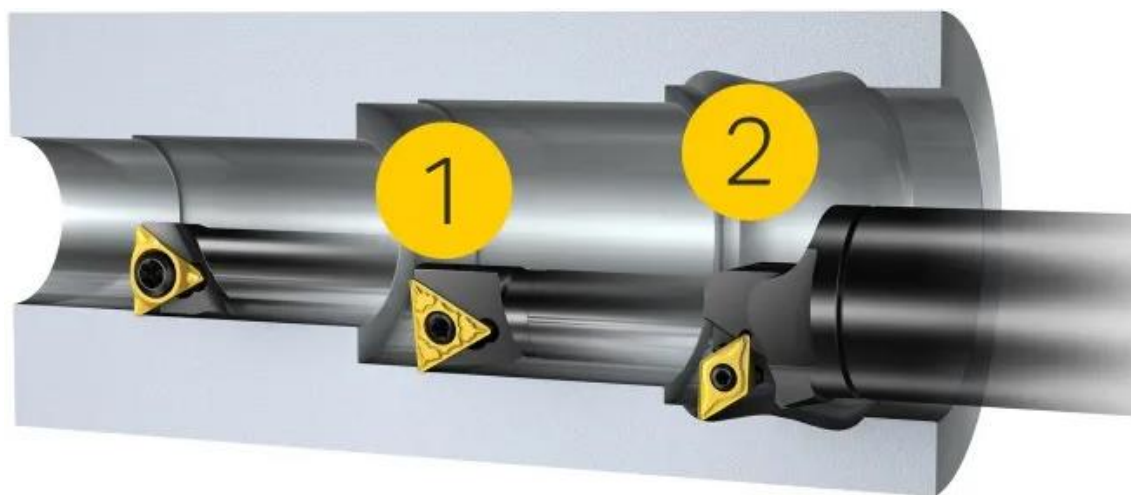
Na terceira etapa ocorre a resolução do equacionamento que determina a resposta do sistema. Existem diversos métodos de solução propostos, como os métodos padrão para equações diferenciais, transformadas de Laplace, métodos matriciais e métodos numéricos. Para esse projeto será utilizado o método matricial e o método numérico utilizando o software OCTAVE para as respostas do sistema em diferentes cenários.

A quarta e última etapa compõe a interpretação dos resultados obtidos, onde as soluções obtidas na etapa três forneceram os dados relacionados ao posicionamento, velocidades e acelerações dos elementos do sistema vibracional. A interpretação permite a consistência do modelo matemático adotado com relação à realidade, além de definir o modelo padrão para previsão do comportamento vibratório.

### 3.4. VIBRAÇÕES EM TORNEAMENTO

Considerando a antiguidade dos processos de usinagem por torneamento aplicados em produção mecânica, inúmeros estudos são realizados tentando identificar, prever ou até mesmo controlar vibração em torneamento para otimizar o processo em si. Utiliza-se métodos analíticos, computacionais e/ou empíricos para visualizar o comportamento vibracional em certa condição de usinagem.

Neste trabalho se propôs o estudo desse fenômeno no caso de torneamento interno utilizando uma ferramenta com comprimento quatro vezes maior que o diâmetro (4D). A operação de torneamento interno, principalmente, sofre de maneira mais significativa os efeitos de vibração, pois consiste na utilização de ferramentas flexíveis com parte do seu comprimento não fixado e gerando maiores momentos. A figura 6 indica um exemplo.

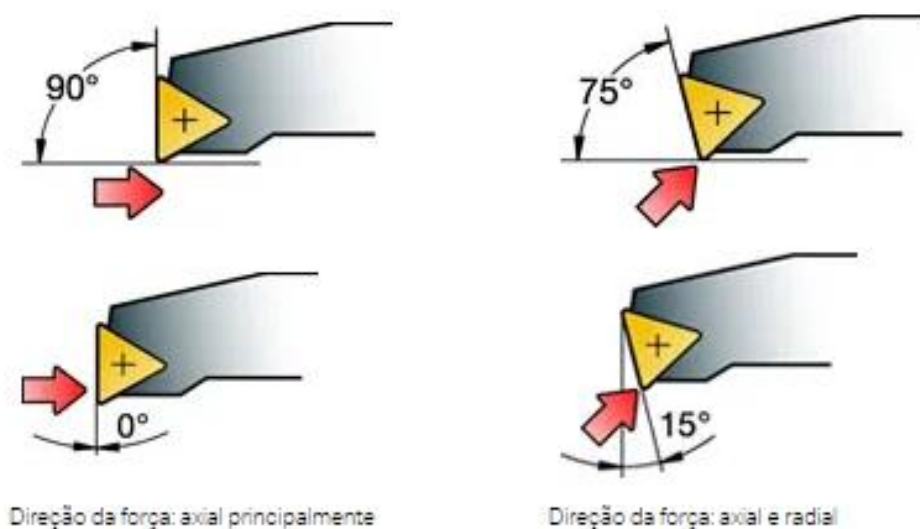


**Figura 6 – Exemplo do “lançamento” de ferramentas para torneamento interno**  
Fonte: Torneamento interno – (Site oficial SANDVIK – 2021)

Como indicado nos catálogos da SANDVIK (fabricante de ferramentas de torneamento), existem diversos fatores que podem influenciar no efeito vibracional ao mesmo que existem meios de minimizar essas condições. De maneira geral, o catálogo indica que ângulo de posição, ângulo de ataque ou ângulo de saída, raio de ponta da ferramenta, macro geometria e micro geometria, e a profundidade de corte em função do raio de ponta da ferramenta são os principais fatores.

O ângulo de posição, definido por Machado et al (2009), é o ângulo formado pelo plano de trabalho com o plano de corte, sendo seu vértice o indicador da ponta da ferramenta. De acordo com o catálogo SANDVIK, esse ângulo mais próximo de  $90^\circ$  maximiza as forças axiais na ferramenta, vindas da parte traseira dela. Dessa maneira, haveria menos flexão durante o corte se a força axial se equiparar a força radial. Para torneamento interno, a SANDVIK recomenda ângulo de  $75^\circ$ .

Também demonstrado por Machado et al (2009) o ângulo de saída é formado pela superfície de saída e o plano referência da ferramenta. A angulação mais positiva permitirá uma redução das forças de corte necessárias, resultando assim em menor deflexão da ferramenta também. Nesse caso, também se aplica o conceito de buscar menor força radial para diminuir a deflexão nessa direção. As figuras 7 e 8, retiradas do site oficial da SANDVIK, ilustram as angulações descritas.



**Figura 7 - Demonstração do ângulo de posição (Fatores que influenciam vibração  
Fonte: Site oficial SANDVIK – 2021)**



**Figura 8 – Demonstração do ângulo de entrada (Fatores que influenciam vibração)  
Fonte: Site oficial SANDVIK – 2021)**

Outro fator importante, principalmente nas ferramentas utilizadas atualmente, consiste no formato e tamanho da ponta de inserto (pastilha). Os catálogos de ferramentas, em sua maioria, indicam qual a melhor escolha de pastilha para determinado objetivo. De maneira geral, indicam que para reduzir



a tendência vibracional se seleciona raio de ponta menor. Quando se referem ao ângulo da ponta:

- Menor ângulo trará maior estabilidade para a ferramenta e permitirá um maior espaço para a superfície de fuga e a formação de cavaco dissipar a vibração radial.
- Um ângulo maior necessitará de maior potência de usinagem, porém a maior robustez da pastilha aprimora a confiabilidade do processo.

A SANDVIK menciona que se deve ter atenção ao desgaste da ferramenta referente ao uso de parâmetros de corte impróprios. Uma velocidade de corte correta diminuirá o desgaste excessivo da pastilha, que influencia nas forças de corte e acabamento. A velocidade muito alta pode gerar entupimento de cavacos e piorar os efeitos de desgaste, principalmente se considerar a reação do material a ser usinado ao esforço de corte.

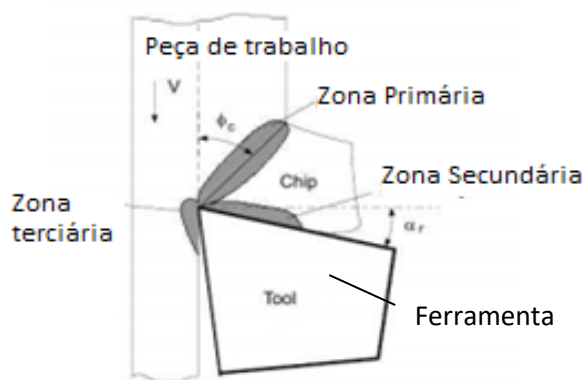
A profundidade de corte, recomendada maior que o raio da pastilha, e os parâmetros de avanço devem ser considerados com cautela, buscando melhores áreas de cavaco. Uma área maior implica maior fora de corte, e uma menor implica em maior atrito da ferramenta. Considerando um longo balanço de ferramentas, como no caso do objeto de estudo desse projeto, é recomendado aumentar o avanço e em certos casos a velocidade de corte para amenizar vibrações.

## 4. MODELAGEM FÍSICA E ANALÍTICA

### 4.1. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Considerando todos os elementos envolvidos na operação de torneamento, como a ferramenta, a pastilha, os suportes de fixação, a peça de trabalho, o sistema de fixação da peça etc.; uma modelagem muito precisa do fenômeno mostra demasiada complexidade. Por isso, inúmeros estudos já realizados, como os feitos por V. Gutakovskis et al (2011) e S. Ghorban et al (2019), simplificam os modelos de análise do problema, geralmente tratando a operação no plano bidimensional e evitando a complexa modelagem no plano ortogonal de 3-eixos.

De acordo com V. Gutakovskis et al (2011), o corte bidimensional se assemelha à um processo de conformação através de uma ferramenta reta, onde a aresta de corte é perpendicular à velocidade de corte ( $v_c$ ) (Figura 9). O cavaco formado com largura de corte e profundidade de corte ( $a_p$ ) é arrancada da peça usinada. O autor descreve então que o corte é considerado uniforme na área de corte, com as forças de corte atuantes sendo a tangencial ( $F_t$ ) e as forças vindo do avanço da ferramenta ( $F_f$ ).



**Figura 9 – Formação de cavaco**  
**Fonte: V. Gutakovskis et al (2011) modificada**

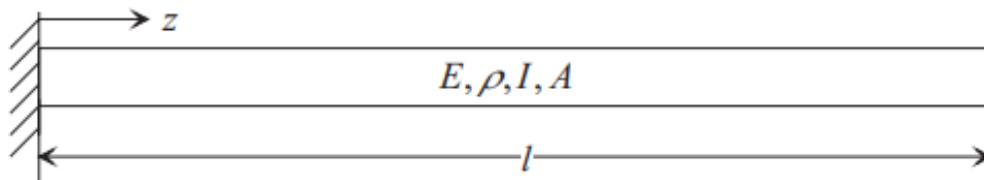
No estudo de V. Gutakovskis et al (2011), os autores utilizaram de um modelo de vibrômetro para realizar a medição de vibrações individuais e o deslocamento da ferramenta, enquanto realizaram uma bateria de testes com uma variação de parâmetros de corte pré-definida. De maneira experimental,

os autores visualizaram a variação de rugosidade nos testes e o desgaste da pastilha. Com os dados obtidos, fizeram comparativos gráficos para delinear o comportamento.

Para a resolução do problema, os autores usufruíram das funcionalidades do ABAQUS, software que utiliza do método de elementos finitos, para visualizar a distribuição de temperatura da ferramenta de corte e da peça. A propriedade de temperatura do processo foi definida pelos autores com importância considerável para a formação de cavaco e conseqüentemente para a reação vibracional do sistema.

O estudo realizado por Tatiana Smirnova et al (2007), determina algumas análises das propriedades dinâmicas de ferramentas para torneamento interno, onde consideram material da mesma e método de fixação. Para este trabalho, será considerado a definição do modelo linear para ferramentas internas dada por Smirnova (2007).

A definição consiste em avaliar as propriedades de barras de seção transversal constante em relação ao comprimento  $A(z) = A$  e as propriedades de momento de inércia também constantes no comprimento  $I(z) = I$ . Smirnova et al (2007) considera o modelo da ferramenta como uma barra engastada em uma ponta e livre na outra, visto na figura 10.



**Figura 10 – Modelo para barra mono engastada; E como módulo de elasticidade,  $\rho$  como densidade da ferramenta, I como momento de inércia, A como área da seção transversal e l como comprimento da barra**  
**Fonte: Tatiana Smirnova et al (2007)**

O trabalho apresentado por Siamak Ghorbani et al (2019) propõe uma interessante análise de como modelar um sistema massa-mola equivalente para uma ferramenta fixada em circunstâncias similares com o estudo de Smirnova (2007). De acordo com as considerações de Ghorbani (2019), conclui-se que a massa da ferramenta é distribuída uniformemente ao longo com comprimento. A equação (4.1), definida pelos autores, para o deslocamento da ferramenta é conhecida como:

$$Z_i = PLy_i^2 * \left(3 - \frac{y_i}{2}\right) * \left(\frac{1}{6EJ^2}\right), \quad (4.1)$$

onde  $Z_i$  representa o deslocamento na  $i$ -ésima seção na direção Z, P é a força de corte na direção Z, L é o comprimento livre em relação à fixação da ferramenta de corte,  $y_i$  é a distância da seção em relação à fixação, E sendo módulo de elasticidade e J é o momento de inércia da seção transversal.

Siamak Ghorbani et al (2019) assume que a primeira frequência harmônica da ferramenta (harmônica com maior amplitude que afeta a vida útil da ferramenta) permite modelar o sistema dinâmico da ferramenta como um sistema de massa única, onde a massa antes considerada distribuída será alocada no ponto mais afastado da fixação, definindo uma barra sem peso com uma massa concentrada pontual M.

Para obter os valores de massa do sistema, Siamak Ghorbani et al (2019) descreve o uso das equações a seguir para a massa concentrada M e a massa  $M_0$  para a massa não fixada da ferramenta, a partir das simplificações e integrações realizadas em seu estudo.

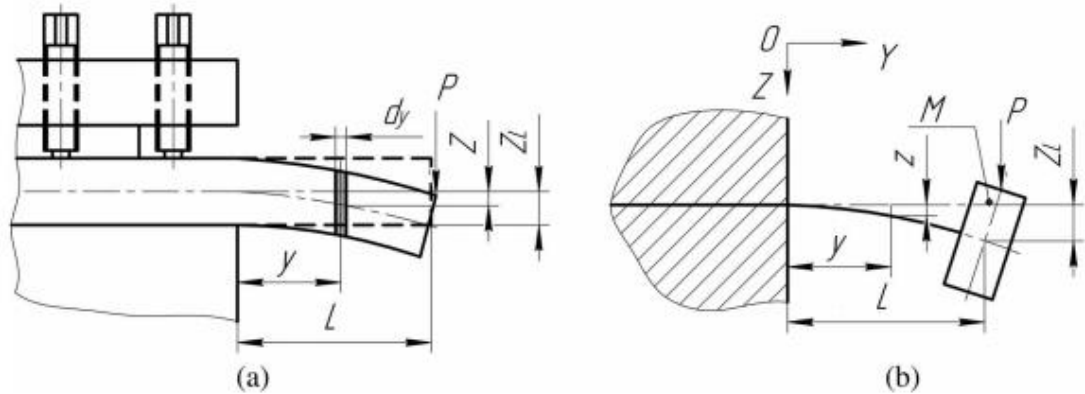
$$M_0 = bhL\gamma, \quad (4.2)$$

$$M = 0.2357M_0, \quad (4.3)$$

Onde b é a largura da seção transversal da ferramenta, h é a altura da seção transversal e  $\gamma$  é a densidade do material da ferramenta. Utilizando o equacionamento conhecido para o cálculo de frequências naturais do sistema, os autores definem uma relação entre as massas do sistema equivalente e as propriedades vibracionais, indicadas na equação (4.4).

O equacionamento provido por Siamak Ghorbani et al (2019) poderá ser usado para comparação com o sistema proposto neste trabalho. A figura 11 ilustra a configuração tomada por Ghorbani (2019).

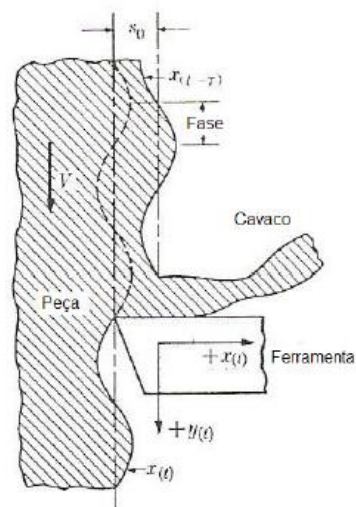
$$f_0 = \left(\frac{1.03h}{\pi L^2}\right) * \sqrt{\frac{E}{\gamma}}, \quad (4.4)$$



**Figura 11 – Modelo de para ferramenta de torneamento interno (a) modelo da fixação ferramenta e (b) modelo de massa concentrada da ferramenta.**  
**Fonte: Siamak Ghorbani et al (2019)**

No estudo de Carlos Eiji (2008), o autor define que a interação entre os esforços de corte e as vibrações ocorrem em um sistema de ciclo dinâmico fechado, onde a frequência de excitação auto excitada está próxima ou maior que a frequência natural da ferramenta. Indica também que o efeito auto-regenerativo no corte ortogonal relaciona as vibrações com o tamanho da espessura de cavaco formado.

Como indicado na figura 12 presente no estudo de Eiji (2008), pode se considerar um movimento da ferramenta atribuídos aos parâmetros  $x(t)$  e  $y(t)$ , a velocidade de corte  $V$  e  $\tau$  como o período referente a revolução da peça de trabalho. Essa visualização permite interpretar que o caminho formado pela geração de cavaco pode ser definido como uma função de excitação de base.



**Figura 12 – Formação de cavaco**  
**Fonte: Carlos Eiji (2008)**

## 4.2. ANÁLISE DO PROBLEMA PROPOSTO

Como já mencionado, a situação que se busca analisar neste trabalho consiste no comportamento vibracional de ferramentas de torneamento interno, com comprimento quatro vezes maior que seu diâmetro, condição que intensifica o fenômeno devido o comprimento livre de fixação durante o processo de usinagem e pode causar imperfeições dimensionais ou desgaste elevado de ferramenta.

Neste trabalho inicial, a visualização mais teórica do comportamento vibracional junto com a busca de informações em estudos recentes que envolvessem situações similares visou um estudo acumulativo para definir o melhor modelo de análise do problema, com o intuito de trazer as informações em âmbito mais preciso e ao mesmo tempo manter uma certa simplicidade.

Descrito no capítulo anterior, o modelo físico de uma operação de usinagem pode ser demonstrado tridimensionalmente ou bidimensionalmente. Dessa forma, será combinado as modelagens propostas por V. Gutakovskis et al (2011) e S. Ghorban et al (2019), assim como adicionados os conceitos apresentados por Carlos Eiji (2008). A combinação dos estudos permitirá uma abordagem em duas dimensões do corte de ferramenta e seus esforços, além de introduzir a interação da formação de cavaco no efeito vibratório.

Para a análise vibracional, será considerado a ferramenta como uma barra mono engastada, com o engaste representando a fixação nos suportes de máquina, e com propriedades mecânicas calculadas como em situações de vigas mono engastadas prevista pelos conceitos de resistência dos materiais. Adicionalmente, os estudos de Siamak Ghorbani et al (2019) e Tatiana Smirnova et al (2007) servirão de referência para o equacionamento da modelagem física, definindo os conceitos de rigidez da ferramenta e os efeitos do deslocamento de massa concentrada, permitindo até obter a frequência natural do sistema.

Com o intuito de se buscar uma maior proximidade à realidade ao utilizar os resultados obtidos nesse trabalho, serão fornecidas informações provenientes de catálogos de fabricante para propriedades de ferramenta, como referentes a densidade material e geometria; informações que irão definir

massa e momentos inércias inerentes nos cálculos da modelagem física do sistema vibracional equivalente.

A peça de trabalho será considerada como parte rígida, sem deformação, e com sua rugosidade na superfície de corte definida por uma função. Como descrito no estudo de Carlos Eiji (2008), se torna possível visualizar a variação nos vales e picos do acabamento superficial como uma função de excitação de base, conceito de vibrações que permitirá uma modelagem um pouco mais complexa da interação entre a ferramenta e a peça em situação de vibração.

A abordagem do sistema de vibração equivalente, somando os conceitos dos autores apresentados, ocorrerá como um sistema massa mola de dois graus de liberdade amortecido e forçado, afetado também pela excitação de base. As forças envolvidas consistem na força tangencial, proveniente do esforço de corte e seus parâmetros, e dos efeitos da massa concentrada.

Para solução do equacionamento de governo do sistema, será modelado o sistema matricial que rege o fenômeno (matrizes de massa, rigidez e amortecimento) e por meio do software OCTAVE, realizar a visualização gráfica do comportamento de vibração do sistema em diferentes situações parametrizadas.

## 5. DESENVOLVIMENTO E ANÁLISE DE RESULTADOS

### 5.1. MODELO MATEMÁTICO PARA RUGOSIDADE SUPERFICIAL

Neste tópico serão apresentados alguns conceitos referentes aos estudos realizados sobre topografia superficial em processos mecânicos e sua relação com os conceitos de ondas. Com isso, permitir a definição de uma função que descreva a rugosidade superficial de um material para aplicação no equacionamento de vibrações com base de excitação.

A fim de se descrever uma função que represente a rugosidade superficial de um material, se mostra necessário compreender alguns conceitos. A norma NBR ISO 4287:2002 define as nomenclaturas e reuni as informações básicas sobre o meio de medição e identificação do perfil de rugosidade, sendo apresentadas neste trabalho os importantes para o desenvolvimento dele.

#### 5.1.1. Equipamento de Medição

Outra visão importante seria a indicada por Sérgio Manuel (2005), onde um perfil de rugosidade é medido pela altura individual dos pontos em relação a uma referência que geralmente não está alinhada com o resto do perfil, considerando um tipo de “ruído”. Descreve então a necessidade de dois estágios para realizar a medição e retirar o tal ruído: nivelar o perfil e aplicar um filtro.

Para isso, seria necessário explicar como funciona o sistema de medição de perfis rugosos utilizado, no caso, o método Stylus ou perfilometria. Consiste basicamente em uma ponta de diamante que percorre a superfície do material estudado, sendo ligada a um medidor de deslocamento vertical que converte o movimento em sinal elétrico. Posteriormente amplificado e convertido em informação digital, o computador analisa e calcula os parâmetros gerais do perfil.

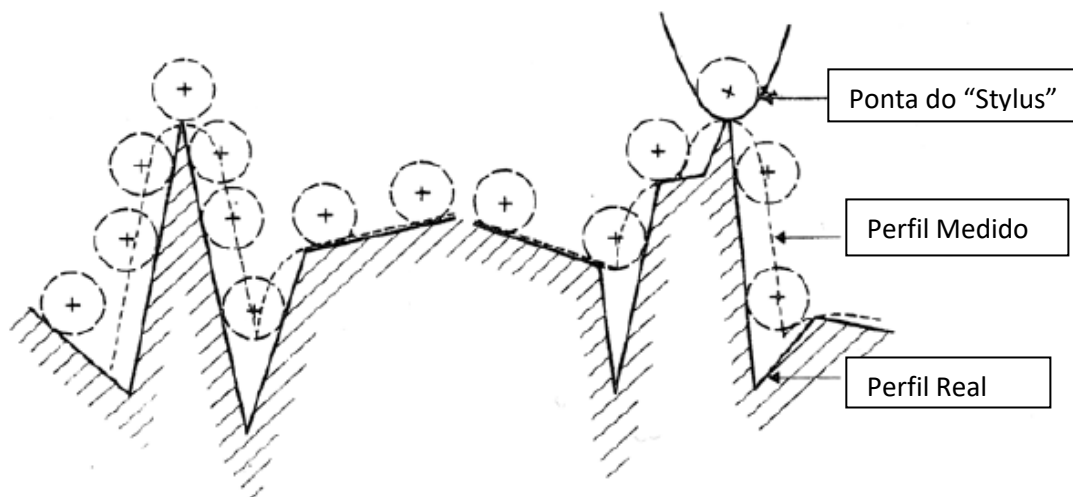
Uma ilustração de um equipamento com ponta diamante está na Figura 13.





**Figura 13 – Exemplo de Perfilômetro com ponta de diamante – Modelo CV Haffner  
Fonte: Catálogo Haffner – 2021)**

Entretanto, esse equipamento possui um erro associado referente ao sua ponta diamantada (stylus). O stylus possui uma ponta cônica entre 2 e 10 nanômetros de raio e um ângulo de  $60^\circ$  a  $90^\circ$ . Seu perfil geométrico afeta a precisão da medição conforme a superfície se mostra mais irregular, promovendo até o dano na superfície devido ao diamante. A figura 14 ilustra o erro associado.



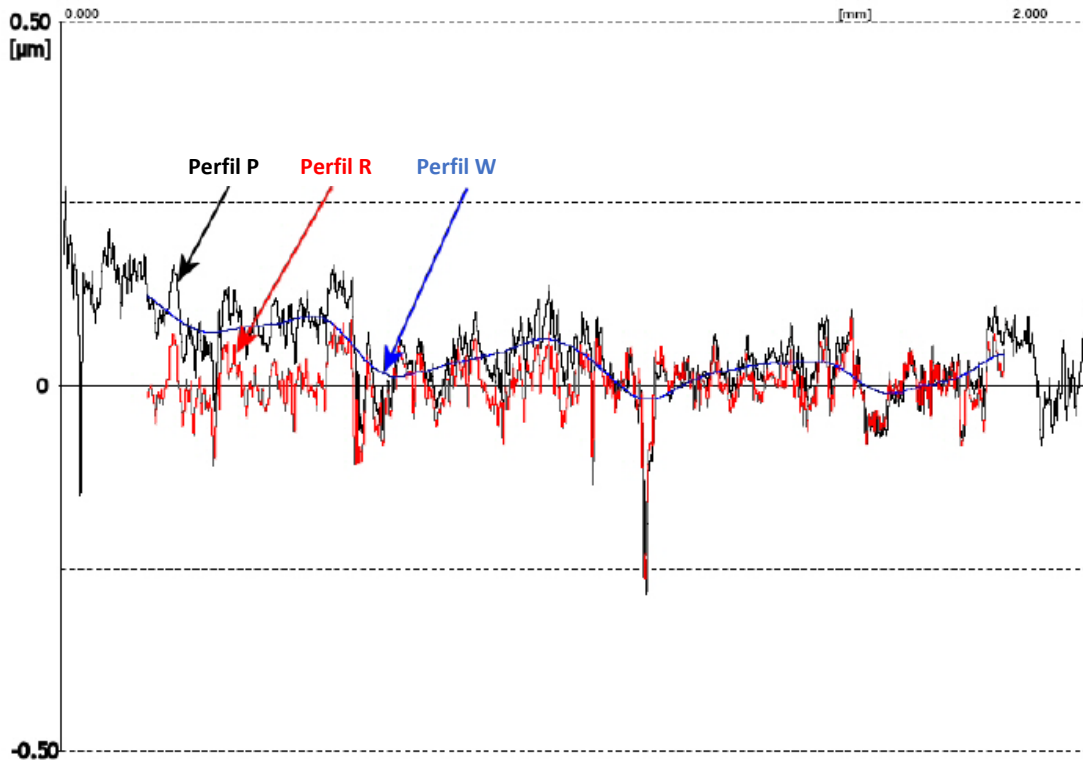
**Figura 14 – Ilustração do erro associado a geometria da ponta**  
**Fonte: Sérgio Manuel (2005)**

O equipamento de medição retorna ao operador o gráfico topográfico referente à superfície medida, com o perfil descrito não filtrado. Como indica Sergio (2005) e a norma ISO 4288:1987, o filtro separará o perfil de rugosidade do perfil de ondulação, sendo o parâmetro determinante a banda de transmissão, indicada na tabela 1 abaixo, retirada por Sérgio (2005) da norma ISO 4288:1987.

Banda de transmissão $\lambda_c$ (mm)	Perfis Periódicos	Perfis Não periódicos		Comprimento de avaliação $\lambda_c/L$ (mm)
	Espaçamento de picos $S_m$ (mm)	$R_a$ ( $\mu\text{m}$ )	$R_z$ ( $\mu\text{m}$ )	
0,08	0,013 - 0,04	(0,006) - 0,02	(0,025) - 0,1	0,08 / 0,4
0,25	0,04 - 0,13	0,02 - 0,1	0,1 - 0,5	0,25 / 1,25
0,8	0,13 - 0,4	0,1 - 2	0,5 - 10	0,8 / 4
2,5	0,4 - 1,3	2 - 10	10 - 50	2,5 / 12,5
8	1,3 - 4	10 - 80	50 - 200	8 / 40

**Tabela 1 – Banda de transmissão  $\lambda_c$**   
**Fonte: Norma ISO 4288:1987**

A aplicação da filtragem na leitura do equipamento suprime e separa os perfis que causam ruído na medição, gerando uma leitura mais próxima da real topografia do material. Sergio (2005) exemplifica na figura 15, a diferença nos gráficos dos perfis primário, de rugosidade e a ondulação associada.



**Figura 15 – Ilustração dos perfis P (primário), R (rugosidade) e W (ondulação) de uma medida de superfície**  
**Fonte: Sergio Manuel (2005)**

Sergio Manuel (2005) descreve que para o desenvolvimento do gráfico anterior (Figura 15), foi aplicado no perfil medido um filtro corretor de fase e removido os vales abaixo da linha média, para depois o perfil ser novamente filtrado em correção de fase. O resultado obtido pelo autor foi uma linha média superposta na original que gera o perfil de rugosidade R.

### 5.1.2. Parâmetros

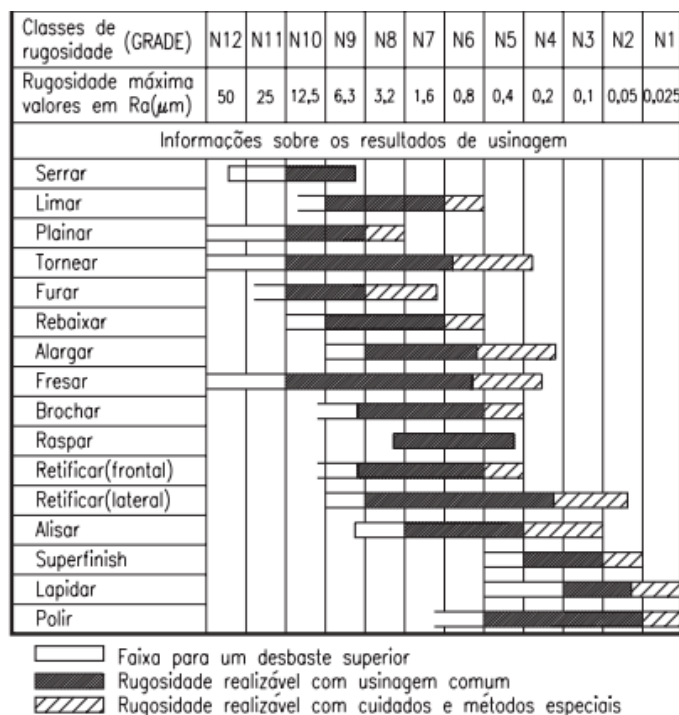
De acordo com E. G. Thwaite (1982), os instrumentos de perfilamento, como o indicado acima, retornam a medição de rugosidade em termos do desvio da média aritmética Ra. A NBR ISO 4287:2002 define Ra como sendo a média aritmética dos valores absolutos das ordenadas  $Z(x)$  no comprimento de amostragem, sendo  $Z(x)$  a altura do perfil avaliado em qualquer posição.

A norma define o equacionamento de Ra, com  $l$  sendo o comprimento da amostra medida, como:

$$Ra = \frac{1}{l} \int_0^l |Z(x)| dx \quad (5.1)$$

A definição de Ra permite a caracterização padrão de rugosidade utilizada atualmente na produção mecânica em geral, sendo tabelada e dividida em classes de acordo com os processos mecânicos que as geram com maior precisão. A tabela 2 indica as classes e seus respectivos valores de rugosidade Ra.

Vale ressaltar que a tabela indica que a faixa de rugosidade entre 1.6 e 12.5  $\mu\text{m}$  são de maior facilidade de obtenção nas operações de torneamento. Sendo assim, os quatro valores de rugosidade Ra apresentados serão utilizados para os testes numéricos apresentados mais à frente, permitindo uma visualização do fenômeno de vibrações em situações mais comuns na indústria.



**Tabela 2 – Simbologia, equivalência e processos de usinagem**

Fonte: <http://moldesinjecaoplasticos.com.br/parametros-de-avaliacao-da-rugosidade-acabamento-superficial/> (Acessado 2021)

A norma ISO 4287:2002 conceitua outros parâmetros para medição de rugosidade que não se mostraram relevantes para aplicação no equacionamento de vibrações utilizado neste projeto. Sendo Ra definido como amplitude média de picos e vales, se mostra parâmetro suficiente para

descrever um possível perfil de movimento em seus pontos máximos por uma superfície.

## 5.2. EQUACIONAMENTO MODELO PARA RUGOSIDADE

Objetivando desenvolver uma relação entre o processo de usinagem e a superfície a ser usinada, pode-se pensar que o fator de importância mais visível é a rugosidade superficial da peça e como descrevê-la como uma função matemática. Posteriormente neste trabalho será aplicado tal conceito em cima do estudo do fenômeno vibracional como a função que descreve a excitação de base do movimento.

Mostra-se escasso na literatura e no meio acadêmico os estudos relacionados a essa definição para superfície. Entretanto tanto, dois estudos se mostraram importantes para a teoria proposta neste trabalho, as modelagens matemática e análises de E.G Thwaite (1981) e Sergio Manuel (2005).

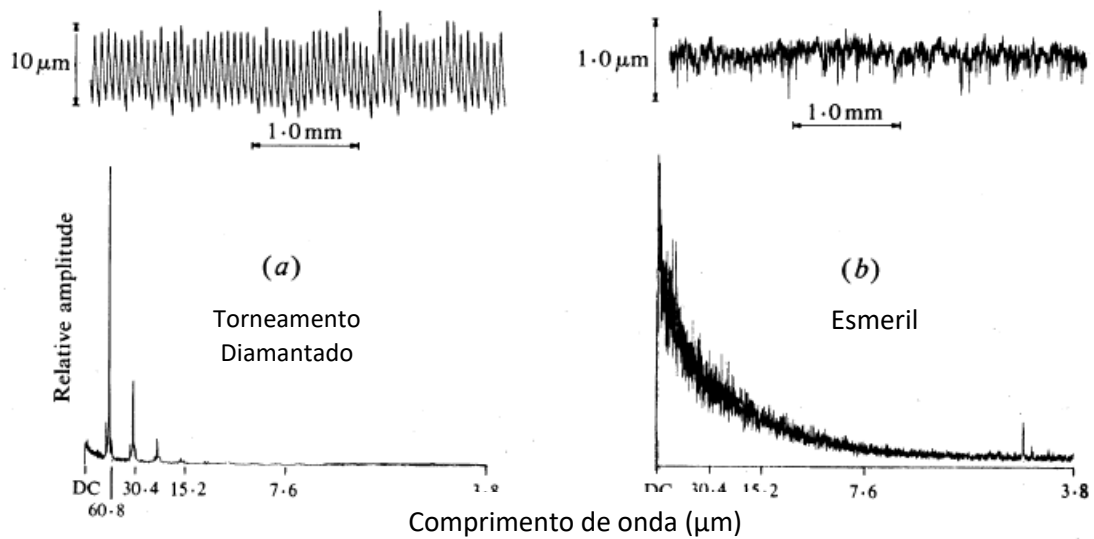
### 5.2.1. Modelo de E.G Thwaite (1981)

E.G Thwaite (1981) em seu estudo focou em analisar de maneira geral a topografia de uma superfície, tendo em vista os efeitos que ela gera em propriedades inerentes do material, como condutividade termoelétrica ser dependente da quantidade de área de contato disponível, capacidade de carregamento e mecanismos de fricção e desgaste.

Mesmo sendo um estudo mais antigo, o autor teve acesso aos métodos tradicionais de medição de superfície já descritos, como o perfilômetro, e às técnicas de holografia e dispersão luminosa. Entretanto, os equipamentos ainda possuíam métodos analógicos. O autor realiza uma descrição dos equipamentos disponíveis para seu estudo, assim como suas limitações e parametrizações.

Definido por Thwaite, topografia significa a distribuição de alturas através da superfície, sendo microgeometria e rugosidade sinônimos. Em seu trabalho, o autor realiza a comparação entre duas superfícies, uma superfície

periódica torneada com ferramenta diamantada e uma superfície randômica por esmerilhamento. A figura 16 demonstra a comparação feita por Thwaite.



**Figura 16 – Acima o perfil e abaixo o espectro de amplitude. (a) Superfície periódica por torneamento diamantado e (b) Superfície produzida por esmeril**  
**Fonte: E.G Thwaite (1981)**

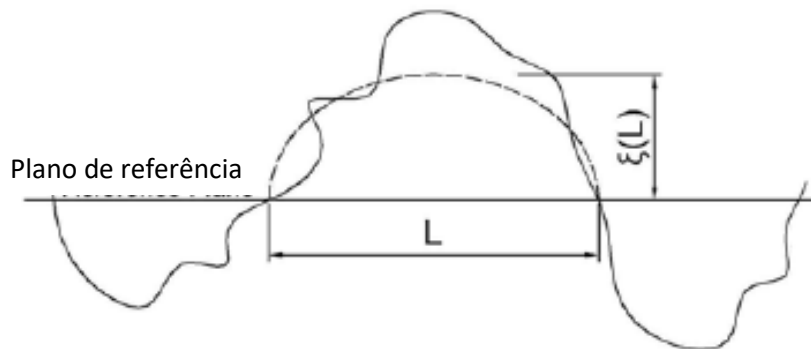
Thwaite não desenvolveu em seu estudo uma modelagem própria, fazendo uma revisão das modelagens já realizadas por autores anteriores a sua época. O autor notificou a importância que o modelo de distribuição gaussiano tem derivar resultados práticos, porém com qualidade questionada, e a alta relevância da análise numérica para estimar perfis através de dados obtidos em espaçamentos finitos de medição.

Conclui seu estudo indicando a dificuldade presente em se estabelecer uma caracterização aceitável, principalmente devido às limitações técnicas dos equipamentos em medir pequenas dimensões da superfície mesmo em alta resolução.

### 5.2.2. Modelo de Sérgio Manuel (2005)

Em um estudo mais recente e com a norma ISO 4288 já escrita para padronizar os métodos de medição de topografia de superfície, Sérgio Manuel (2005) realizou a aproximação de perfis de rugosidade experimentais em funções matemáticas em duas dimensões com auxílio da programação em software MATLAB através de formulações pré-existentes.

O autor primeiramente indica a formulação de Aramaki, descrevendo-a como uma forma de aproximar o perfil de superfície medido através de funções quadráticas a fim de calcular pressão média e área de contato. A definição para asperidade de Aramaki, indicada no estudo de Sérgio (2005), está na figura 17.

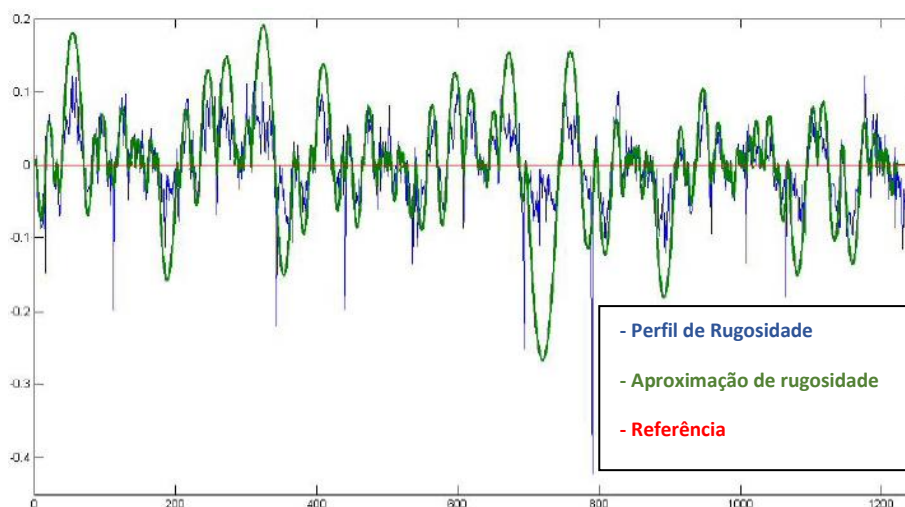


**Figura 17 – Definição de asperidade por Aramaki**  
**Fonte: Sérgio Manuel (2005)**

A partir desse conceito, o autor realiza a tentativa do equacionamento para gerar uma função parábola utilizando as variáveis  $\xi(L)$  como a altura de asperidade e  $L$  como largura, admitindo a distribuição da largura com uma função exponencial. A equação final apresentada, com  $Z$  como a altura da superfície em um ponto  $x$  da largura medida, consiste em:

$$z = -\frac{4\xi}{L^2}x^2 + \frac{4\xi}{L}x \quad (5.2)$$

A figura 18 mostra a aproximação feita por Sérgio ao utilizar a aproximação de Aramaki:



**Figura 18 – Aproximação pelo método Aramaki; linha azul como perfil de rugosidade, linha verde como aproximação da rugosidade e linha vermelha como referência**  
**Fonte: Sérgio Manuel 2005**

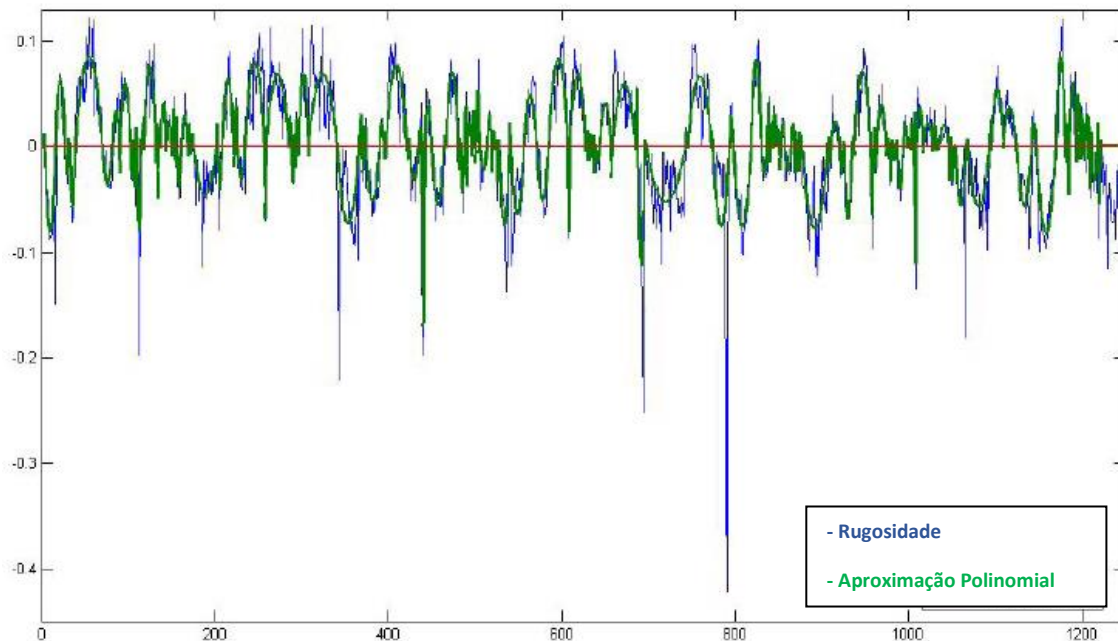
O segundo modelo de aproximação descrito pelo autor consiste em utilizar o método dos mínimos quadrados. A equação base (5.3) usada pelo autor está descrita abaixo:

$$z = ax^2 + bx + c \quad (5.3)$$

Neste método o autor definiu os coeficientes b e c através das condições de contorno, onde o início da função asperidade é zero e o final também, necessitando somente calcular o coeficiente “a” descrita pela função abaixo:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i^2 z_i) - (x_0 + x_1) \sum_{i=1}^n x_i z_i + x_0 x_1 \sum_{i=1}^n z_i}{\sum_{i=1}^n x_i^4 + n x_0^2 x_1^2 + (x_0 + x_1)^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2x_0 x_1 (x_0 + x_1) \sum_{i=1}^n x_i + 2x_0 x_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2(x_0 + x_1) \sum_{i=1}^n x_i^3} \quad (5.4)$$

Com todas os coeficientes definidos, Sérgio Manuel (2005) realizou a comparação entre o perfil medido e a função descrita, assumindo  $c=0$  e mostrado na figura 19.





**Figura 19 – Aproximação pelo Método dos quadrados mínimos; linha azul como a rugosidade e a linha verde a aproximação polinomial**  
**Fonte: Sérgio Manuel (2005)**

Pode-se observar que este método se aproximou mais de um perfil real do que o método de Aramaki, porém, como descrito pelo autor e ao utilizar  $c=0$ , a definição de asperidade aparecerá com mais picos e vales do que o perfil real e ter uma base mais larga. Ao variar  $c$  em dois valores distintos, o autor aproximou a função mais perto do perfil medido.

Sintetizando, as aproximações feitas por Sérgio Manuel (2005) conseguem descrever de maneira bem próxima aos perfil de rugosidade obtido pelas medições experimentais. Contudo, uma limitação em relação a sua utilização neste projeto é a necessidade de ambos os cálculos para o equacionamento e para os scripts em MATLAB ou OCTAVE usar dos dados instrumentais, impossibilitando uma aplicação geral dos conceitos propostos.

Este projeto busca, de maneira simples, desenvolver um método de visualização e possível predição de um comportamento vibratório da ferramenta contemplando a rugosidade prévia da superfície da peça a ser usinada como a excitação de base.

Analisando os diversos estudos sobre modelagem matemática de superfícies, inclusive os estudos já apresentados; o maior obstáculo encontrado é a necessidade de se obter uma referência de superfície através da medição instrumental. Com isso, a avaliação puramente teórica do comportamento randômico da distribuição de picos e vales na rugosidade superficial é complexa.

### 5.2.3. Função Descritiva da Topografia da Superfície

Tendo em vista os estudos apresentados anteriormente, nota-se a necessidade empírica para o desenvolvimento de uma função que represente uma topografia de superfície com coerência. Com isso, este trabalho usa como referência a medição de superfície experimental provida pelo estudo de Pereira e Braga (2020), a qual descreve graficamente os pontos de rugosidade obtidos através de um rugosímetro portátil.

A partir do gráfico, presente no anexo B, é possível visualizar a altura da superfície medida ( $\mu\text{m}$ ) em relação ao comprimento da amostra (mm). Almejando representar a superfície como uma função matemática através do software OCTAVE, propõe-se extrair manualmente os pontos cartesianos exibidos no estudo, de maneira mais aproximada possível.

Mesmo com boa resolução, não é possível determinar com precisão cada ponto apresentado em toda a extensão da amostra, e assim, se torna necessário realizar uma redução no comprimento de observação e aproximação dos valores nos eixos. Para esse estudo, serão obtidos e analisados os pontos presentes no comprimento de amostra de 0 a 0.1 mm e aplicado no software OCTAVE para gerar uma aproximação gráfica.

Para gerar os pontos no OCTAVE, busca-se obter dos eixos do gráfico o máximo de valores que forem necessários ou possíveis dentro do comprimento de amostra definido no estudo. Quanto maior o número de coordenadas obtidos, mais preciso será a aproximação feita pelo software. A figura 20 denota o gráfico gerado, notando-se que o eixo das abscissas se refere ao tempo.

Como já mencionado, o gráfico disponível no estudo de Pereira e Braga (2020) realiza uma comparação entre o comprimento da amostra e as amplitudes medidas pelo instrumento, gerando uma relação entre dimensões de comprimento. Para realizar a análise vibracional, será necessário relacionar a amplitude (rugosidade) com o tempo de observação, no caso, ao se considerar a relação entre a distância percorrida pelo rugosímetro e uma velocidade de movimento.

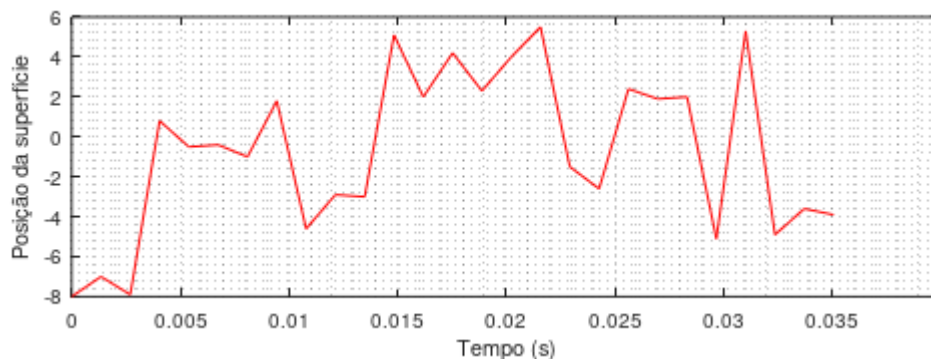
Em torneamento, temos o conceito de velocidade de avanço, que compõe o movimento paralelo ao eixo de rotação da máquina e conseqüentemente, paralelo ao eixo da peça. Assim, podemos utilizar a equação (5.5) para definir os valores do eixo das abscissas, onde cada tempo  $t$  será obtido através de cada posição  $x$  do gráfico dividido pela velocidade de avanço da operação.

$$t = x/v_f \quad (5.5)$$

Os parâmetros utilizados para geração do gráfico da figura 20 foram  $v_c = 100$  mm/min e  $f_a = 0.1$  mm/rot. A partir das equações (5.6) e (5.7), obtém-se o valor de  $v_f$  utilizando a rotação  $N$  e avanço  $f_a$  com a conversão de unidades para mm/s.  $D$  representa o diâmetro da peça de trabalho.

$$N = \frac{1000 * v_c}{\pi D} \quad (5.6)$$

$$v_f = N * f_a / 60 \quad (5.7)$$



**Figura 20 – Gráfico da rugosidade aproximada através do OCTAVE para comprimento de amostra de 0.1 mm.  
Fonte: Própria (2021)**

Nota-se que os parâmetros de corte aplicados para definição da rugosidade não necessariamente são os mesmos da usinagem em si. Será considerado que para analisar a vibração na superfície, a mesma estará pré usinada com rugosidade superficial definida por uma operação de torneamento, prática comum em fabricação. Dessa forma, a análise vibracional contemplará a operação de acabamento tendo em vista a peça finalizada logo após.

Para aplicação no método de análise vibracional, a excitação de base precisa ser caracterizada pela relação de deslocamento x tempo, com seu comportamento definido como uma função  $y(t)$ . O gráfico de rugosidade mostrado somente indica uma aproximação da rugosidade real e para definir a função que descreve a superfície é necessário utilizar de uma combinação funções com forma já conhecida.

A série de Fourier, mencionada por RAO (2009), pode representar qualquer função periódica através de uma soma infinita de termos em cossenos e senos. Isto significa que se uma  $y(t)$  for uma função periódica em um período  $T$ , pode ser representada pela equação (5.6) de maneira geral.

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nwt) + b_n \sin(nwt)] \quad (5.6)$$

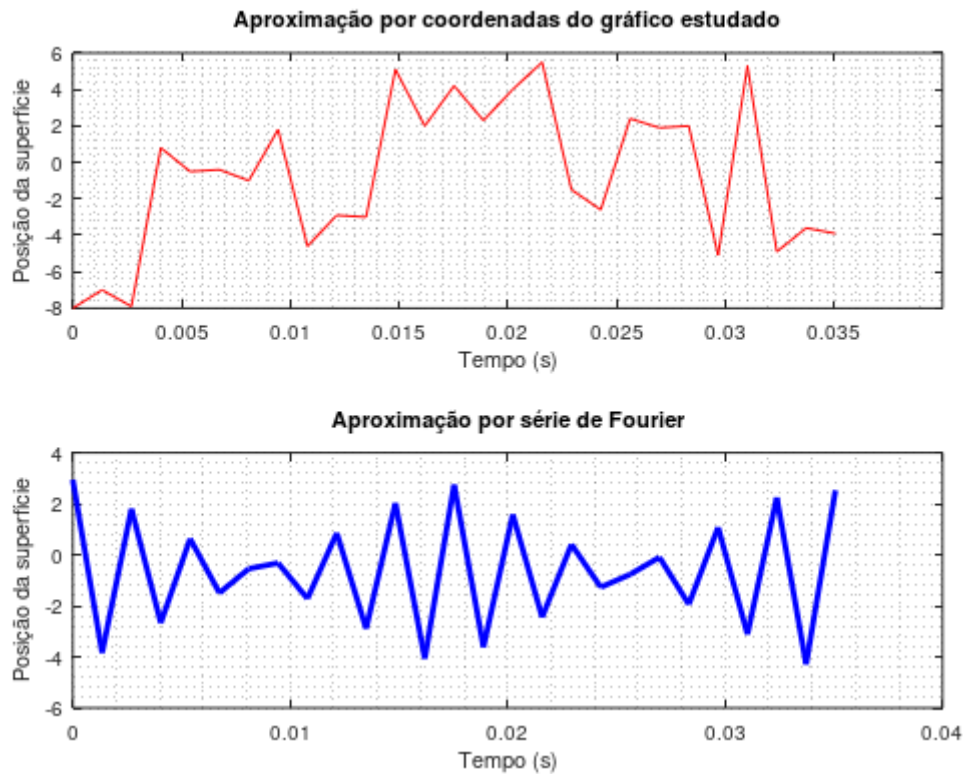
No caso,  $w = 2\pi/T$  representa a frequência fundamental e  $a_n$  e  $b_n$  são os coeficientes constantes de Fourier. O coeficiente  $a_0$  representa um valor médio da função periódica. Os coeficientes de Fourier são determinados através de integrações, porém, para algumas funções conhecidas, os coeficientes possuem equacionamento definido de acordo com algumas características das funções mais complexas.

Esse método possui grande aplicação em meios científicos para a descrição de funções no domínio do tempo infinitas e periódicas. O conteúdo disponibilizado por Erick Cheever (2005) permite a avaliação e utilização das equações para o cálculo dos coeficientes de Fourier.

Para o presente trabalho, após a análise do gráfico aproximado de rugosidade, foi proposto a utilização de funções triangulares como referência para aproximar a função da figura 20 em uma forma periódica. Dessa forma, o coeficiente  $a_n$  é definido na equação (5.7) e  $b_n = 0$ , de acordo com Erick (2005). A figura 21 denota a aplicação em OCTAVE do equacionamento proposto, comparado com ao gráfico obtido das coordenadas de rugosidade.

$$a_n = 4A \frac{1-(-1)^n}{\pi^2 n^2}, \text{ para } n \text{ ímpar} \quad (5.7)$$

Onde  $A$  representa a amplitude máxima da função periódica e  $n$  o número de iterações (somadas) atribuídas a Série de Fourier. Para a aproximação apresentada a seguir:  $n = 50$  iterações;  $A = 3.7 \mu\text{m}$  representada pela rugosidade máxima;  $T = 2.5 \text{ ms}$ , período definido pela parte periódica entre  $0.01$  e  $0.0075 \text{ s}$  do gráfico de coordenadas.



**Figura 21 – Gráfico ilustrativo da função descritiva de rugosidade através das Séries de Fourier para onda triangular.**  
**Fonte: Própria (2021)**

Importante ressaltar que a função gerada pela série de Fourier é uma aproximação matemática que utiliza da periodicidade do fenômeno estudado, ou seja, a função obtida pelas coordenadas do estudo de Pereira e Braga (2020) não se adequa em sua extensão observada nesse quesito. Com isso, foi definida a utilização de uma parte que se enquadre em comportamento periódico na aplicação da série de Fourier.

Isso implica que ao variar os parâmetros de entrada da rugosidade, haverá alteração na função descritiva e afetará o comportamento vibracional, pois se refere a excitação de base do sistema. Em caso de peças brutas, com rugosidade superficial grosseira sem operação de usinagem, pode-se realizar a utilização da velocidade de movimento definida pelo movimento do instrumento de medição para gerar o gráfico em relação ao comprimento de amostra.

Após todas essas considerações, sugere-se que a função excitação de base  $y(t)$  utilizada na análise vibracional será definida por uma aproximação por série de Fourier com base em funções de ondas triangulares, com a soma de no mínimo dois termos de senos e cossenos e gerada em OCTAVE. A função

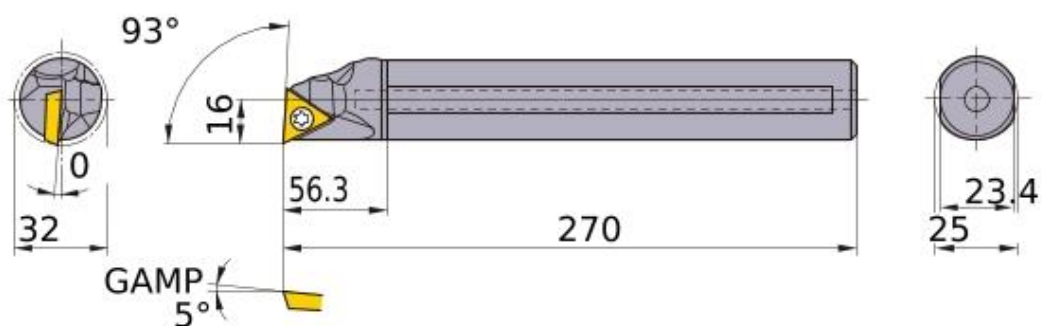
obtida neste processo é uma aproximação de baixa precisão e aplicada a fim de visualizar o impacto no comportamento vibracional.

### 5.3. MODELO FÍSICO PARA FERRAMENTA

Como já descrito na seção 2.3 deste trabalho, a modelagem dos elementos do sistema vibracional deve ser feita de maneira a contemplar o máximo de características possíveis sem tornar o modelo demasiadamente complexo, considerando que o estudo de vibrações de um sistema, por si só, já aumenta tal complexidade.

Dessa forma, a maior preocupação em se determinar uma representação para uma ferramenta de corte longa (comprimento pelo menos quatro vezes maior que o diâmetro da seção transversal) é denotar as particularidades de um sistema mecânico nessa condição, principalmente em um sistema vibracional.

Neste projeto, por ser um estudo teórico, adotou-se como referência para cálculos um modelo de ferramenta real presente em catálogo de fabricação, mais especificadamente o catálogo Mitsubishi. A ferramenta de modelo FSTUP3225R-16A, mostrada na figura 23 com suas características dimensionais, foi escolhida considerando sua aplicação recomendada em usinagem de diâmetros pequenos e longos.



**Figura 22 – Suporte interno para torneamento. Modelo FSTUP3225R-16A**  
**Fonte: Catálogo Digital Mitsubishi (2021)**

O fabricante descreve esse modelo como anti-vibratório, pois o detalhe de fabricação na área atrás do alojamento do inserto e seu peso reduzido diminuem a possibilidade de vibrações. Entretanto, o fabricante não especifica

com detalhes a relação entre esses detalhes de fabricação com o comportamento vibratório da ferramenta e não serão considerados no modelo utilizado.

Nota-se que, considerando o comprimento total da barra e seu diâmetro de fixação, a relação L/D é de 10 vezes. Em uma operação de usinagem, a ferramenta possui um comprimento efetivo de utilização que depende de como está fixada no suporte da máquina, podendo ser observado no estudo de Ghorbani (2019). Sendo assim, para esse trabalho foram considerados 90 mm de fixação no suporte de máquina e caracterizando um  $L/D = 7$ .

As características de ferramenta importantes para a modelagem utilizada neste trabalho estão descritas abaixo:

- Comprimento efetivo L: 180 mm;
- Diâmetro d: 25 mm;
- Área de seção A (calculada por  $\frac{\pi d^2}{4}$ ): 490,87 mm<sup>2</sup>;
- Momento de inércia de área (calculada por  $\frac{\pi r^4}{4}$ ): 132535,9 mm<sup>3</sup>;

Outra característica de extrema importância para o comportamento vibracional da ferramenta, são as propriedades relacionadas ao material de fabricação. Como Chunjin Zhang et al (2020) descrevem em seu artigo, uma das possibilidades de se diminuir o efeito vibracional está no uso de materiais que melhorem a rigidez dinâmica da ferramenta. Seu estudo verifica os efeitos do uso de fixadores compósitos em ferramentas para melhorar o comportamento vibracional.

No sistema adotado neste trabalho, a ferramenta está fixada diretamente no suporte de fixação de uma máquina de torneamento, como já descrito na seção 3.1 na análise dos estudos de Smirnova (2007) e Ghorbani (2019), adotando então as propriedades materiais da ferramenta como parâmetro. O modelo usado como referência é fabricado de Carbetto de Tungstênio.

As propriedades materiais da ferramenta importantes para o modelo utilizado estão descritas abaixo, sendo os valores padrão para carbetto de tungstênio retirados dos artigos da AZO Materials:

- Módulo de elasticidade E: 643 GPa

- Densidade material  $\rho$ : 15630 Kg/m<sup>3</sup>

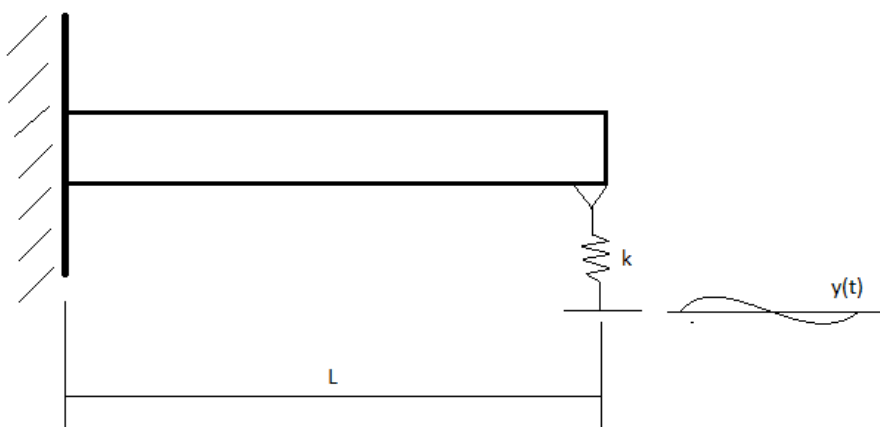
A utilização dos parâmetros dimensionais e materiais da ferramenta real permitem uma definição mais completa do sistema vibracional e aproxima a avaliação teórica do comportamento vibracional a um estudo empírico instrumentado, o qual pode ser realizado para confirmação de resultados.

#### 5.4. MODELAGEM DO SISTEMA VIBRACIONAL

Os estudos de Smirnova (2007) e Ghorbani (2019) prescrevem duas modelagens que podem ser aplicadas à ferramenta estudada nesse projeto, pois ambos consideram como base a flexão da ferramenta em modo equivalente ao método de avaliação de barras ou vigas mono engastadas em uma superfície, descrito em inúmeras literaturas de resistência dos materiais como no livro de RC Hibbeler (7ª edição).

Entretanto, ambos os modelos não caracterizam por completo o modelo proposto neste trabalho, já que não consideram a interação com a superfície de contato durante a usinagem como um fator efetivo na geração de vibração do sistema, sendo o foco principal deste trabalho demonstrar essa relação.

O modelo adotado neste trabalho configura uma barra (viga) mono engastada de comprimento  $L$  com uma mola equivalente ao movimento elástico  $k$ , sob o efeito de excitação de base da função  $y(t)$ , definida na seção 4.2.3. A figura 24 demonstra uma representação simplificada da modelagem.

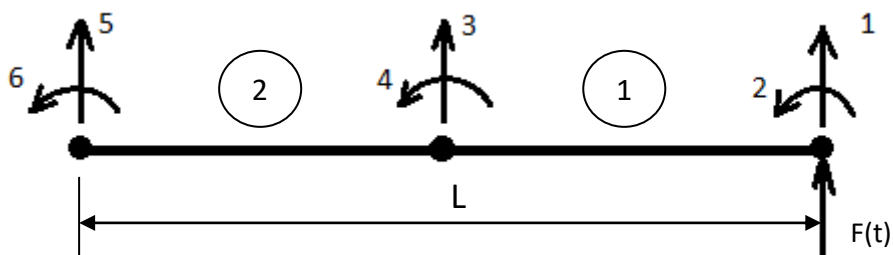


**Figura 23 – Representação do sistema mecânico**  
Fonte: Própria (2021)



Para calcular as configurações de vibração do sistema e analisar seu comportamento, é necessário definir seu diagrama de corpo livre (DCL) e identificar os esforços relacionados aos graus de liberdade utilizados. A análise de uma estrutura contínua, como uma viga, permite liberdade na escolha do número de graus de liberdade, já que ao longo de seu comprimento existe diferentes possíveis configurações. No caso atribuído, por exemplo, o deslocamento vibracional pode ser diferente entre um ponto no final da viga e na seção em  $L/2$ .

Dessa forma, atribuir um maior o número de graus de liberdade ao sistema o deixará mais complexo em termos de cálculo e a precisão da representação do comportamento vibracional do elemento contínuo tão quanto sua análise aumentarão em relação ao comportamento real. Para este trabalho foi atribuído inicialmente uma condição de 6 graus de liberdade, utilizando a combinação de dois elementos estruturais em vigas planas, indicado na figura 25.



**Figura 24 – DCL do sistema teórico com dois elementos de viga plana e 6 graus de liberdade**  
**Fonte: Própria (2021)**

Como se trata de um conceito de viga mono engasta, os pontos 5 e 6 da figura estão localizados no engaste, ou seja, possuem deslocamento nulo. Com isso, ocorre uma representação do sistema para 4 graus de liberdade, identificados na figura 25 pelos pontos 1, 2, 3 e 4. A força  $F(t)$  representa o vetor definido pela reação elástica da ferramenta ao esforço de corte e a base de excitação  $y(t)$ , sendo  $F_0$  de acordo com as equações 1.1 e 1.2.

Para a aplicação numérica, foram testados arbitrariamente, valores fictícios de  $k$  com o intuito de aproximar o valor de  $x$  a  $y(t)$ . Com isso, seria possível representar de maneira mais realista a mola fictícia como o comportamento elástico da viga em relação a excitação de base.

As matrizes de massa [M] (matriz 5.9) e rigidez [K] (matriz 5.10) (presentes na equação de governo 3.1) foram definidas com base nos estudos de elementos finitos para elementos estruturais de vigas planas com 4 graus de liberdade, definidos abaixo onde L é o comprimento do elemento de viga, A é a área da seção transversal,  $\rho$  é a massa específica, E é o módulo de Young e I é o momento de inércia.

$$M = \frac{\rho AL}{420} \begin{vmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{vmatrix} \quad (5.9)$$

$$K = \frac{EI}{L^3} \begin{vmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & -2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{vmatrix} \quad (5.10)$$

Como o modelo adotado para este trabalho compõe uma combinação de dois elementos de viga plana, a matriz de rigidez necessita ser adaptada para representar os 6 graus de liberdade. Para isso, monta-se a matriz 4 x 4 de rigidez K para ambas as estruturas separadamente com comprimento  $L_e = L/2$ , considerando uma para os graus 1, 2, 3 e 4; e a outra para os graus 3, 4, 5 e 6.

Nota-se que as duas matrizes compartilham os graus 3 e 4, pois as duas vigas também os compartilham, mostrado na figura 25. Dessa forma, a matriz de rigidez global  $K_{\text{global}}$  será composta pela união das duas matrizes que representam as vigas 1 e 2,  $K_1$  e  $K_2$  respectivamente. As últimas serão iguais devido aos elementos de viga 1 e 2 também serem iguais em dimensões, como na matriz 5.10.

As colunas e linhas das matrizes representam os graus de liberdade do elemento do sistema modelado e cada elemento segue a nomenclatura  $K_{ij}$ , sendo “i” a linha e “j” a coluna onde o elemento está localizado. Como dito anteriormente, cada matriz estipula a rigidez em relação cada grau de liberdade. A matriz  $[K_1]$  inicia no elemento  $K_{11}$  até  $K_{44}$  (graus 1 ao 4), enquanto a matriz  $[K_2]$  inicia em  $K_{33}$  até  $K_{66}$  (graus 3 ao 6), dentro da matriz global.

$$K_1 = K_2 = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L_e & -12 & 6L_e \\ 6L_e & 4L_e^2 & -6L_e & 2L_e^2 \\ -12 & -6L_e & 12 & -6L_e \\ 6L_e & 2L_e^2 & -6L_e & 4L_e^2 \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

A matriz global  $K_{global}$  está representada em (5.12) e a matriz adaptada em (5.13), sendo definida pela combinação dos elementos particulares de  $K_1$  e  $K_2$  e somando os elementos compartilhados (indicados na matriz abaixo pelo quadrado alaranjado).

Considerando que os pontos 5 e 6 do sistema estão localizados no engaste onde os deslocamentos são nulos, as linhas e colunas 5 e 6 são eliminadas da matriz global de rigidez, formando a matriz 4 x 4 necessária para os cálculos.

$$K_{global} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ K_{12} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ K_{13} & K_{23} & K_{33} + K_{112} & K_{34} + K_{122} & K_{35} & K_{36} \\ K_{14} & K_{24} & K_{43} + K_{212} & K_{44} + K_{222} & K_{45} & K_{46} \\ K_{15} & K_{25} & K_{35} & K_{45} & K_{55} & K_{56} \\ K_{16} & K_{26} & K_{36} & K_{46} & K_{56} & K_{66} \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

$$K_{global} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L_e & -12 & 6L_e \\ 6L_e & 4L_e^2 & -6L_e & 2L_e^2 \\ -12 & -6L_e & 24 & 0 \\ 6L_e & 2L_e^2 & 0 & 8L_e^2 \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

A matriz de massa do sistema estudado é definida de forma idêntica à apresentada em (5.12), porém utilizando a matriz elementar de massa em (5.9). Dessa forma, a matriz global referente ao sistema está apresentada abaixo em (5.14), utilizando o comprimento  $L_e = L/2$ .

$$M_{global} = \frac{\rho A L_e}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L_e & 54 & -13L_e \\ 22L_e & 4L_e^2 & 13L_e & -3L_e^2 \\ 54 & 13L_e & 312 & 0 \\ -13L_e & -3L_e^2 & 0 & 8L_e^2 \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

A equação de governo (3.1) indica a necessidade da matriz de amortecimento para os cálculos numéricos. Com isso, o amortecimento será definido em função das matrizes massa e rigidez através da equação 5.14,

onde serão usados coeficientes  $\alpha$  e  $\beta$  iguais a 0.1 e caracterizando um valor mínimo para a matriz amortecimento, porém ainda relevante.

$$B = \alpha * M + \beta * K \quad (5.14)$$

Após definir as matrizes que regem o sistema através das características e graus de liberdade dos elementos que irão vibrar, é necessário definir o vetor de entrada do sistema excitado, composto pelas forças externas que irão afetar o comportamento, a força periódica  $F(t)$  e a função de excitação de base  $y(t)$ . A função  $y(t)$  já foi definida na seção 5.2.3 deste trabalho.

A força  $F(t)$  está descrita abaixo em (5.15),

$$F(t) = k * [y(t) - y(1)] \quad (5.15)$$

Aplicando as matrizes encontradas em 5.9, 5.11 e 5.14 na equação diferencial 3.1; podemos determinar a equação de governo do sistema mecânico vibracional estudado adicionando as partes referentes à excitação de base de acordo com RAO (2009), indicado na equação 5.15.

$$M\ddot{u} + B\dot{u} + Ku = F(t) + B\dot{y} + Ky \quad (5.15)$$

Se tratando de uma equação diferencial de segunda ordem, a equação (5.15) precisa ser modificada a fim de isolar a variável em maior ordem  $\ddot{u}$  em função das de menor ordem  $\dot{u}$  e  $u$ . Simplesmente é feito a movimentação algébrica de “ $B\dot{u} + Ku$ ” e a pré-multiplicação da equação pela matriz  $M$  invertida, como indicado pela equação 5.16.

$$\ddot{u} = M^{-1}F(t) + M^{-1}B\dot{y} + M^{-1}Ky - M^{-1}B\dot{u} - M^{-1}Ku \quad (5.16)$$

Através de uma substituição de variáveis, onde  $\dot{u} = v$ , podemos definir um sistema com duas equações (5.17) para a diferencial de segunda ordem:

$$\begin{cases} \dot{u} = v \\ \dot{v} = -M^{-1}Bv - M^{-1}Ku + M^{-1}F(t) + M^{-1}B\dot{y} + M^{-1}Ky \end{cases} \quad (5.17)$$

Identificando o sistema na forma matricial (5.18) permite uma melhor visualização dos vetores de estado e a aplicação na equação de estado (5.19).

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [0] & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [0] & [0] & [0] \\ M^{-1} & M^{-1}B & M^{-1}K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F(t) \\ \dot{y} \\ y \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

$$\dot{Z} = A * Z + B * U \quad (5.19)$$

Onde,

- Z – Vetor das variáveis de estado
- A – Matriz de estado
- B – Matriz de compatibilidade de entradas
- U – Vetor de entradas do sistema

## 5.5. ANÁLISE DE RESULTADOS

Como mencionado anteriormente, a análise do comportamento vibracional de um sistema forçado consiste em verificar a relação entre as frequências dele durante o forçamento e as frequências naturais, definidas por uma configuração livre do sistema (sem forçamento), considerando que o quanto mais próximo esses valores são, mais perigosa a configuração é para o equipamento.

Para o caso de torneamento interno, verificar como cada configuração de parâmetros influencia na resposta vibracional do sistema representa um melhor aproveitamento de ferramental e produtividade. Entender o quão “perigosos” os parâmetros de usinagem escolhidos podem inclusive evitar acidentes indesejáveis durante a produção, evitando perdas materiais e humanas.

As frequências naturais do sistema são obtidas através da solução do problema de autovetores e autovalores. Como a equação de estado é uma função diferencial de segunda ordem no tempo, suas soluções são obtidas através do software matemático OCTAVE, com os scripts utilizados no anexo C deste trabalho.

### 5.5.1. Implementação em OCTAVE

A solução de uma equação diferencial pelo OCTAVE é obtida pela função “ode45” que, de acordo com os desenvolvedores, realiza a solução pelo método de Dormand-Price para equações diferenciais ordinárias combinando um método de quarta e quinta ordem.

A função utiliza como parâmetros o tempo de execução  $t$  ('tspan') e as condições iniciais  $Z_0$  para retornar o valor do vetor de estado  $Z$  da equação (5.19). Na seção 3.4.2 do estudo de Smirnova et al (2007), os autores descrevem uma visão geral dos métodos utilizados na ode45 e explica os cálculos envolvidos para definição do método de solução diferencial.

Os valores obtidos para o vetor de estado  $Z$  indicam os deslocamentos vibracionais dos graus de liberdade do sistema em função do tempo de acordo com os vetores de entrada, sendo possível traçar um gráfico  $z \times t$  que demonstra visualmente o possível movimento da ferramenta durante a operação e suas amplitudes máximas.

Utilizando o comando  $[\text{vet}, \text{val}] = \text{eig}(K, M)$  no OCTAVE, é possível determinar os autovetores e autovalores utilizando as matrizes de massa e rigidez já obtidas. Esse comando segue como base a definição imposta por Singiresu (2009) na equação 5.20 e 5.21, sendo a primeira para determinar as frequências naturais (autovalores) e a segunda para modos de vibração (autovetores).

$$\det(K - \omega^2 M) = 0 \quad (5.20)$$

$$(K - \omega^2 M)u = 0, \quad (5.21)$$

onde  $u$  representa os modos de vibração.

### 5.5.2. Resultados Obtidos

Os primeiros resultados alcançados são as soluções do problema de autovetores e autovalores, pois somente dependem da definição das matrizes globais de massa, amortecimento e rigidez do sistema. A tabela 3 indica os valores das frequências naturais do sistema (autovalores) e a tabela 4 indica os valores referentes aos modos de vibração do sistema.

Frequências Naturais		
	Rad/s	Hertz
w1	60,69	9,66
w2	383,36	61,01
w3	1296,59	206,36
w4	3763,27	598,36

**Tabela 3 – Frequências naturais do Sistema**  
**Fonte: Própria (2021)**

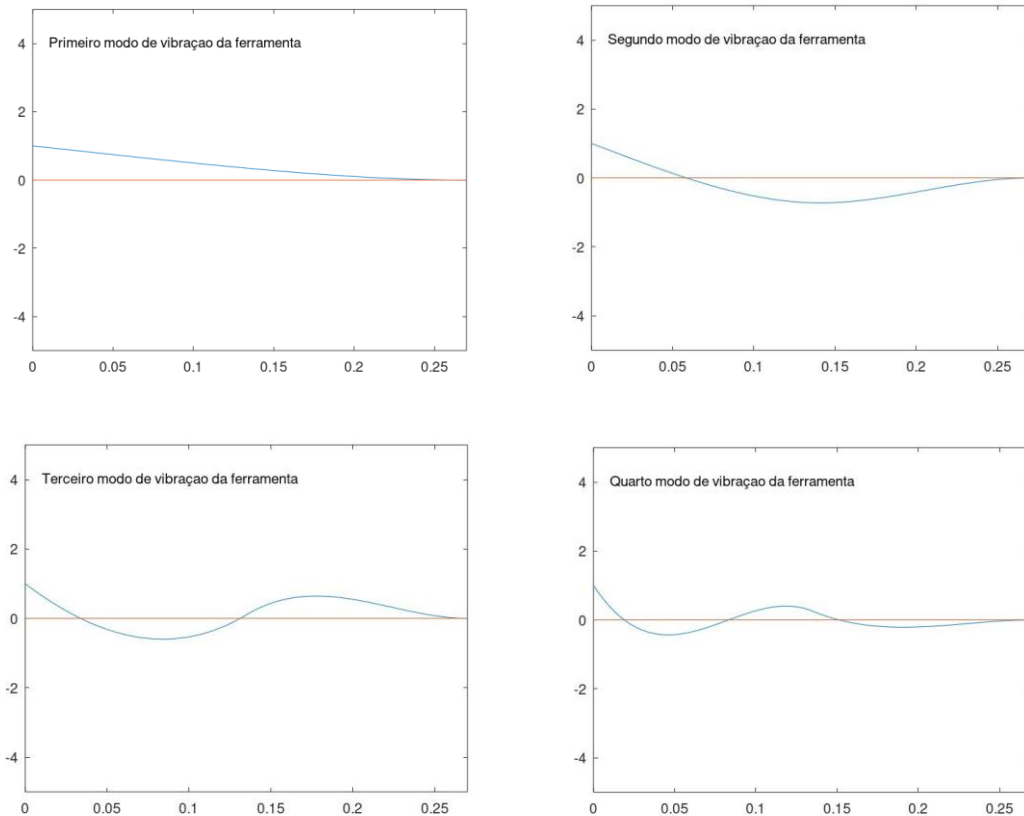
Modos de vibrar			
u1	u2	u3	u4
0,043610	-0,043997	0,048932	-0,082170
-0,000222	0,000785	-0,001748	0,005883
0,014806	0,031757	0,004978	-0,020805
-0,000188	0,007097	0,001386	0,001584

**Tabela 4 – Modos de vibração do Sistema**  
**Fonte: Própria (2021)**

Os valores das frequências naturais serão utilizados como a referência para o fenômeno de ressonância do sistema e podendo ser aplicados diretamente nas equações de governo; permitir analisar o comportamento da ferramenta durante o fenômeno, como sua amplitude máxima, e prever, em certo nível, uma situação de colapso da ferramenta.

Com os valores referentes aos modos de vibrar, se torna possível pré-visualizar como a ferramenta se comportará fisicamente durante a vibração. Cada valor das colunas representa um “movimento” de um grau de liberdade do sistema. Exemplificando, o primeiro elemento da coluna  $u_1$  se refere ao movimento linear do grau de liberdade 1 e o segundo elemento da mesma coluna representa o movimento angular do grau 2, assim por diante.

Abaixo na figura 25, serão representados os quatro modos de vibrar obtidos da tabela 4 e utilizando um script no software OCTAVE para simular a posição. A linha elástica estática representa a ferramenta em estado de repouso, e nas figuras está representada pelo eixo das coordenadas do gráfico.



**Figura 25 – Modos de vibração da ferramenta**  
**Fonte: Própria (2021)**

Ao se aplicar o equacionamento definido para rugosidade superficial, percebe-se que os parâmetros variáveis do sistema será a frequência fundamental  $w_0$ , a rugosidade  $R_a$  e o tempo de medição  $t$ . A equação (5.10) representa a forma geral da equação de excitação de base utilizada neste projeto, indicando o uso de dois termos da série de fourier apresentados anteriormente.

$$y(t) = a_0 + a_1 * \cos(1 * w_0 * t) + b_1 * \sin(1 * w_0 * t) + a_2 * \cos(3 * w_0 * t) + b_2 * \sin(3 * w_0 * t) \quad (5.10)$$

Na aplicação da função ode45, o comando tspan definirá o tempo  $t$  e a rugosidade  $R_a$  será implementada nos coeficientes  $a_1$  e  $a_2$ , como definido anteriormente na equação (5.7) para  $a_n$ . A frequência fundamental será definida da mesma forma que o gráfico da figura 21, utilizando o mesmo valor de período  $T$  e considerando o conceito de que superfícies com rugosidades diferentes podem possuir a mesma distância entre picos e vales.



## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O processo de usinagem evoluiu e continua a evoluir em ritmo expressivo com o desenvolvimento de novos estudos e equipamentos utilizados. Com o avanço do estudo e análise de vibrações no processo, inclusive realizados e aplicados na indústria em nível local, aprimora-se o conhecimento e contramedidas para contornar os problemas provenientes do fenômeno.

Este trabalho almejou desenvolver e propor um método ou procedimento que permita a análise vibracional de uma operação de usinagem de maneira geral e necessitando de recursos simplificados para tal. Dessa forma, visou-se uma maneira de aproveitar dados experimentais simples provenientes de uma medição de rugosidade, realizável de maneira fácil com equipamento de custo acessível em nível industrial.

Ao utilizar como referência os estudos existentes, buscou-se aproximar uma medição empírica da topografia em uma função matemática que pudesse ser aplicada ao equacionamento padrão para comportamento vibracional. Desta maneira, a aproximação pela série de Fourier se mostrou bastante eficaz ao propósito do trabalho.

Contudo, a aproximação foi complexa devido a necessidade de aplicar os dados experimentais em uma função no domínio do tempo e representar com fidelidade a geometria da irregularidade descrita pelo gráfico experimental, onde os dados possuem uma relação de medição apenas no domínio do comprimento da amostra e sem utilizar o tempo como parâmetro.

Para realizar a análise do comportamento vibracional, é imperativo que a função excitação de base (função no domínio do tempo) seja capaz de descrever, o mais próximo possível, as características do sinal real obtido pela medição experimental da superfície.

A aplicação computacional para solucionar as equações diferenciais de governo também sofreram com as magnitudes dos parâmetros da topografia, onde geraram amplitudes muito baixas que se associaram a frequências muito altas.

Nessas condições, o software numérico realizou o processamento do script em tempos elevados e até mesmo em loops infinitos, provavelmente

devido aos valores muito pequenos que afetavam o ajuste de resolução do programa, impossibilitando obtenção de resultados coerentes

O fato de utilizar a rugosidade, parametrizada em microns pelo SI, para descrever a amplitude da excitação de base aplicada em períodos menores que 1 segundo, gerou incoerência nos resultados gráficos e os problemas na execução do script descritos anteriormente.

Para posterior aprimoramento do estudo neste trabalho, seria interessante realizar uma avaliação mais detalhada em relação à sensibilidade dos parâmetros utilizados, buscando determinar as limitações do modelo proposto e visualizar o alcance de utilização. A aplicação do modelo proposto em situações reais e com parâmetros melhor definidos seria importante para tal avaliação, pois seria possível comparação em âmbito experimental.

O modelo pode ser melhorado ao se considerar a excitação de base definida pela irregularidade superficial, imposta diretamente à ferramenta e sem a necessidade de definir uma mola fictícia para representar a capacidade elástica.

Além disso, implementar as forças de corte como excitações periódicas ou não periódicas do sistema, aumentaria a resolução dos resultados obtidos para descrever o comportamento vibracional ao mesmo tempo que permitiria visualizar a variação de parâmetros de corte na vibração da ferramenta. Com isso, almejar uma predição de vibração a partir de dados de máquina, como avanço, profundidade e velocidade de corte; se torna mais viável.

## REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR-6162 NB-204:** Movimentos e relações geométricas na usinagem dos metais. Outubro de 1989

GHORBANI, S., ROGOV, V. A., CARLUCCIO, A., & BELOV, P. S. **The effect of composite boring bars on vibration in machining process.** The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 105(1-4), 1157–1174. Disponível em (Acessado 17/10/2021):

<[https://www.academia.edu/download/60610282/The\\_effect\\_of\\_composite\\_boring\\_bars\\_on\\_vibration20190916-99367-qczux9.pdf](https://www.academia.edu/download/60610282/The_effect_of_composite_boring_bars_on_vibration20190916-99367-qczux9.pdf)>

**Factors that influence vibration.** Sandvik, 2021. Disponível em (Acessado 17/10/2021):

<[https://www.sandvik.coromant.com/en-us/products/silent\\_tools/silenttools/turning/factors\\_that\\_influence\\_vibration/pages/default.aspx](https://www.sandvik.coromant.com/en-us/products/silent_tools/silenttools/turning/factors_that_influence_vibration/pages/default.aspx)>

**Torneamento interno.** Sandvik, 2021. Disponível em (Acessado 17/10/2021):

<<https://www.sandvik.coromant.com/pt-pt/knowledge/general-turning/pages/internal-turning.aspx>>

**Modelo de ferramenta FSTUP3225R-16A para insertos TPMH160304.**

Mitsubishi Materials Brasil, 2021. Disponível em (Acessado 17/10/2021):

<<http://www.mitsubishicarbide.net/mht/pt/boring/20000236/20056102>>

V. GUTAKOVSKIS, G. BUNGA, G. PIKURS. **Cutting tool vibration in the metal cutting process.** Artigo Acadêmico - Riga Technical University, Riga, Latvia, 2011

HENRIK AKESSON, TATIANA SMIRNOVA, THOMAS LAGÖ AND LARS HÅKANSSON. **Analysis of Dynamic Properties of Boring Bars Concerning Different Clamping Conditions**. Artigo Acadêmico – Blekinge Institute of Technology, Department of Signal Processing, 372 25. Ronneby, Sweden, 2009.

MACHADO, A. R.; ABRÃO, A. M; COELHO, R. T.; DA SILVA, M. B. **Teoria da usinagem de materiais**. 1. Ed. São Paulo: Editora Blucher, 2009.

VENTURA, C. E. H. **Análise da relação entre a formação do cavaco, vibração da ferramenta e desvio de forma no processo de torneamento**. Trabalho de formatura – Graduação em engenharia Mecânica, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. São Paulo, 2008.

RAO, SINGIRESU S. **Vibrações mecânicas**. 4 Ed. São Paulo, Editora Pearson Education Brasil, 2009.

KALPAKJIAN, S; SCHMID, S. R. **Manufacturing, Engineering and Technology**. 6 Ed. Editora Pearson 2009.

TAVARES, S. M. O. **Analysis of surface roughness and models of mechanical contacts**. Dissertação através do programa ERASMUS entre a “Facoltà di Ingegneria della Università di Pisa” e “Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto”. Portugal, 2004 – 2005.

CAKIR M. C.; ENSARIOGLU C.; DEMIRAYAK I. **Mathematical modeling of surface roughness for evaluating the effects of cutting parameters and coating material**. Department of Mechanical Engineering, School of Engineering and Architecture, University of Uludag, Gorukle 16059, Bursa, Turkey, 2008.

THWAITE E. G. **Surface Topography Measurement and Analysis**. Division of Applied Physics, CSRIO. Artigo apresentado na Segunda Conferência de Física aplicada“AIP”, Royal Melbourne Institute of Technology, Vic., 30 de Novembro - 4 de Dezembro 1981.

PEREIRA, S. R. A; BRAGA, E de M. **Influências dos níveis de rugosidade nos resultados de análise química por espectrometria de emissão óptica**. Revista Científica Multidisciplinar Núcleo do Conhecimento. Ano 05, Ed. 03, Vol. 09, pp. 102-121. Março de 2020.

Disponível em (Acessado em 17/10/2021):

<https://www.nucleodoconhecimento.com.br/engenharia-mecanica/niveis-de-rugosidade>>

**Tungsten Carbide - An Overview**. AZO Materials, 2021. Disponível em (Acessado em 23/09/2021):

<https://www.azom.com/properties.aspx?ArticleID=1203>

Chunjin Zhang; Yongsheng Ren ; Shujuan Ji; Jinfeng Zhang. **Analysis of the Composite Boring Bar Dynamic Characteristics Considering Shear Deformation and Rotational Inertia**. College of Mechanical and Electronic Engineering, Shandong University of Science and Technology, Qingdao 266590, China; College of Computer Science and Engineering, Shandong University of Science and Technology, Qingdao 266590, China, 2020.

Erick Cheever, Fourier Series Examples. **Swarthmore College**, 2021 Disponível em (Acessado em 17/10/2021):

<https://lpsa.swarthmore.edu/Fourier/Series/ExFS.html>.

**ANEXO A: Coeficientes de força específica  $k_c$**

Coefficientes de força específica  $k_c$  (Catálogo 2020 – 2021, MITSUBISHI TOOLS)

Material	Resistência à Tração e Dureza (MPa)	Coeficiente de Força Específica de Corte $K_c$ (MPa)				
		0.1 (mm/rot)	0.2 (mm/rot)	0.3 (mm/rot)	0.4 (mm/rot)	0.6 (mm/rot)
Aço Baixo Carbono (com ligas especiais)	520	3610	3100	2720	2500	2280
Aço Baixo Carbono	620	3080	2700	2570	2450	2300
Aço Duro	720	4050	3600	3250	2950	2640
Aço Ferramenta	670	3040	2800	2630	2500	2400
Aço Ferramenta	770	3150	2850	2620	2450	2340
Aço Cromo-Manganês	770	3830	3250	2900	2650	2400
Aço Cromo-Manganês	630	4510	3900	3240	2900	2630
Aço Cromo-Molibdênio	730	4500	3900	3400	3150	2850
Aço Cromo-Molibdênio	600	3610	3200	2880	2700	2500
Aço Níquel Cromo-Molibdênio	900	3070	2650	2350	2200	1980
Aço Níquel Cromo-Molibdênio	352HB	3310	2900	2580	2400	2200
Ferro Fundido Duro	46HRC	3190	2800	2600	2450	2270
Ferro Fundido Meehanite	360	2300	1930	1730	1600	1450
Ferro Fundido Cinzento	200HB	2110	1800	1600	1400	1330

**ANEXO B:** Certificado de inspeção de referência para rugosidade

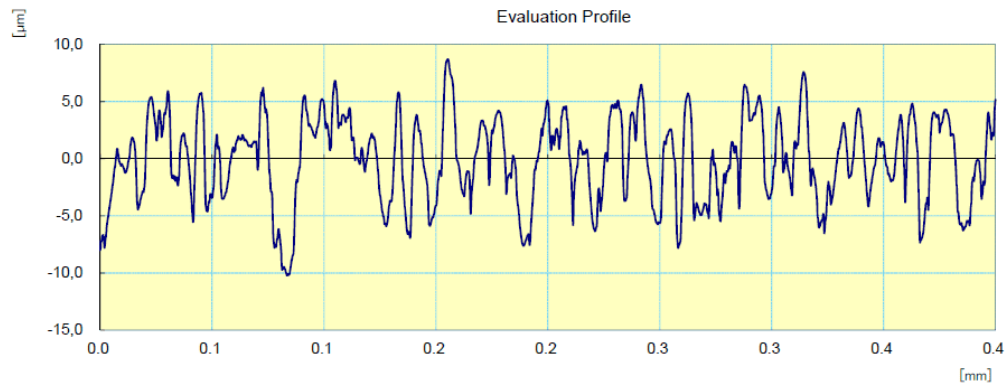


Certificado de inspeção de referência para rugosidade (PEREIRA, Sérgio Rodrigo Araújo. BRAGA, Eduardo de Magalhães—

**Mitutoyo**

23- Jan -2019

## CERTIFICATE OF INSPECTION



Teste rugosidade	CP 01	Operador	Tárcio
Measuring Tool	SurfTest	Comment	Ver2.00
Standard	ISO 1997	N	5
Profile	R	Cut-Off	0.8mm
$\lambda_s$	2.5µm	Filter	GAUSS
Ra	3.087 µm		
Rq	3.702 µm		
Rz	14.746 µm		

## **ANEXO C: Scripts em OCTAVE**

- Script Principal

```

clear % Elimina variáveis utilizadas previamente

close all

global x ro A L E I k M B K w1 w C yb fa xmax vc vf N a0 a1 a2 b1 b2 w0 Ra

%

% Dados da peça e operação %%

%

Ra = 3.2e-5; %Rugosidade inicial em m

D = 50.8e-3; %Diametro da peça de trabalho em m

ap = 0.2e-3; %profundidade de corte em m

fa = 0.1e-3; %avanço por rotação em m/rev

vc= 273; %velocidade de corte m/min

N = 1000*vc/(pi*D); %Rotação em RPM

vf= (N*fa)/60; % velocidade de avanço em m/s

fi = 0;

%

%% Dados da ferramenta %%

%

k=100000; %rigidez fictícia da mola equivalente referente a ferramenta

E = 6.43e+11; %modulo de young N/m^2 para barras carbeto de Tungstênio

L = 270e-3; % comprimento da barra (m)

Le = L/2;

d = 25e-3; %diametro da ferramenta em m

ro = 15880015.8; %massa especifica (kg/m3)

Ar = 490.87e-6; %area da seção transversal (m^2)

I = (pi*(d/2)^4)/4; %momento de inércia (m^4)

alpha = 0.1;

beta = 0.1;

%

```

```
%% Matrizes globais %%
```

```
%
```

```
K = (E*I/(Le^3))*[12 6*Le -12 6*Le; 6*Le 4*Le^2 -6*Le 2*Le^2; -12 -6*Le 24 0; 6*Le  
2*Le^2 0 8*(Le^2)];
```

```
M = (ro*Ar*Le/420)*[156 22*Le 54 Le*(-13); 22*Le 4*Le^2 Le*13 (-3)*(Le^2); 54 13*Le  
312 0; (-13)*Le (-3)*Le^2 0 8*(Le^2)];
```

```
B = alpha*M + beta*K ;
```

```
%
```

```
%%Autovalores e Autovetores
```

```
[vet,val] = eig(K,M);
```

```
%
```

```
%% Modos de vibrar
```

```
%
```

```
u1 = vet(1:4,1);
```

```
u2 = vet(1:4,2);
```

```
u3 = vet(1:4,3);
```

```
u4 = vet(1:4,4);
```

```
%
```

```
% Frequências naturais
```

```
%
```

```
w1 = sqrt (val(1,1)); % 1a Frequência natural do sistema em (rad/s)
```

```
w2 = sqrt (val(2,2)); % 2a Frequência natural do sistema em (rad/s)
```

```
w3 = sqrt (val(3,3)); % 3a frequência natural do sistema em (rad/s)
```

```
w4 = sqrt (val(4,4)); % 4a frequencia natural do sistema em (rad/s)
```

```
%
```

```
% Frequências naturais (Hz)
```

```
%
```

```
f1 = (w1)/(2*pi); % 1a Frequência natural do sistema em Hz
```

```
f2 = (w2)/(2*pi); % 2a Frequência natural do sistema em Hz
```

```
f3 = (w3)/(2*pi); % 3a Frequência natural do sistema em Hz
```

```

f4 = (w4)/(2*pi); % 4a Frequência natural do sistema em Hz

%

%

% Valores das Frequências naturais

%

fprintf('1a Frequência natural: %.2f rad/s\n',w1)
fprintf('2a Frequência natural: %.2f rad/s\n',w2)
fprintf('3a Frequência natural: %.2f rad/s\n',w3)
fprintf('4a Frequência natural: %.2f rad/s\n',w4)

fprintf('1a Frequência natural: %.2f Hz\n',f1)
fprintf('2a Frequência natural: %.2f Hz\n',f2)
fprintf('3a Frequência natural: %.2f Hz\n',f3)
fprintf('4a Frequência natural: %.2f Hz\n',f4)

%

%% Comportamento vibracional %%

%

% Dados de medição da rugosidade

deltax= 0.1e-3; % comprimento da amostra observada em m

ti=0;

tf=deltax/vf; % tf = deltax/vf[(intervalo x de medição)/(velocidade de avanço)]

tic

%Leitura do gráfico de rugosidade

yr = [-8 -7 -7.9 0.8 -0.5 -0.4 -1 1.8 -4.6 -2.9 -3 5.1 2 4.2 2.3 4 5.5 -1.5 -2.6 2.4 1.9 2 -5.1
5.3 -4.9 -3.6 -3.9]; %em micrometros (23 pontos)

tr = linspace(ti,tf,length(yr)); %em segundos

T = deltax;

f0 = 1/T; %frequencia fundamental

w0= 2*pi*f0 %frequencia fundamental em radianos

```

```

v=sum(yr)/length(yr); %valor médio

%Serie de fourier

for n=1:2:50

    an= 4*Ra*((1-(-1)^n)/((pi^2)*(n^2)));

    bn= 0;

    v=v+an*cos(n*w0*tr)+bn*sin(n*w0*tr); %forma geral da série de fourier

    figure(1)

    h=plot(tr,an*cos(n*w0*tr)+bn*sin(n*w0*tr)); hold on

end

grid

toc

figure (2)

subplot(2,1,1)

plot (tr,yr, 'r')

xlabel ('Tempo (s)')

ylabel ('Posição da superfície')

grid minor

title('Aproximação por coordenadas do gráfico estudado')

set (gca, 'FontSize', 10)

xticks (ti:0.005:tf)

subplot(2,1,2)

plot(tr,v,'b','LineWidth',2)

xlabel('Tempo (s)')

ylabel('Posição da superfície')

grid minor

title('Aproximação por série de Fourier')

set (gca, 'FontSize', 10)

%

```

```

%
%% Função para determinar o comportamento vibracional da ferramenta
tic
a0=sum(yr)/length(yr);
A=[ zeros(4) eye(4) ; -inv(M)*K -inv(M)*B];
C =[ zeros(4) zeros(4) zeros(4); inv(M) inv(M)*B inv(M)*K];
tspan = [0 1]; %Tempo de simulação
y0 = [0 0 0 0 0 0 0]; % Condições iniciais (xo=0 e vo=0)
[t,y] = ode45('TesteProjetoFinal_equacao',tspan,y0);
n = length(t); % dimensão do vetor tempo (t)
x = y(1:n,1);
v = y(1:n,2);
figure(3)
plot(t,x)
grid, hold
title ('Comportamento vibratório')
xlabel('tempo (s)')
ylabel('deslocamento vibratório da ferramenta (microns)')

%Definição de yb para os tempos da simulação
a1=4*Ra*((1-(-1)^1)/((pi^2)*(1^2)));
a2=4*Ra*((1-(-1)^3)/((pi^2)*(3^2)));
b1=0;
b2=0;
for i=1:n
    ybs(i)= a0+a1*cos(1*w3*t(i))+b1*sin(1*w3*t(i))+a2*cos(3*w3*t(i))+b2*sin(3*w3*t(i));
end
figure(4)
plot (t,ybs)

```

```

xlabel('Tempo de simulação (s)')

ylabel ('Função excitação de base (m)')

title('Comportamento de y(b) no tempo de simulação')

##figure(5)

##z = ybs-x;

##subplot(3,1,1)

##plot(t,z, 'r')

##subplot(3,1,2)

##plot(t,x, 'b')

##subplot(3,1,3)

##plot(t,ybs, 'g')

xmax = max(x)

fprintf ('Deslocamento Máximo: %.2f \n',xmax)

toc

```

- Script Equacao.m

```

function yp = TesteProjetoFinal_equacao(t,y)

global ro A L E I k m M B K g w1 w C fa vc vf N a0 w0 Ra

%

% Definição das excitações externas

%

a1=4*Ra*((1-(-1)^1)/((pi^2)*(1^2)));

a2=4*Ra*((1-(-1)^3)/((pi^2)*(3^2)));

b1=0;

b2=0;

yb= a0+a1*cos(1*w0*t)+b1*sin(1*w0*t)+a2*cos(3*w0*t)+b2*sin(3*w0*t); %função para
testar primeira frequencia natural

ybp=-a1*w0*sin(t*w0)-3*a2*w0*sin(3*t*w0)+b1*w0*cos(t*w0)+3*b2*w0*cos(3*t*w0);

Ft = k*(y(1)-yb);

```



```
F = [Ft ; 0 ; 0 ; 0]; % vetor força de corte durante a usinagem varia no tempo com a
rugosidade superficial
```

```
YP = [ybp; 0; 0 ; 0];
```

```
Y = [yb; 0; 0; 0];
```

```
%
```

```
% Vetor das entradas
```

```
u = [F ; YP; Y];
```

```
%
```

```
yp = A * y + C*u; % Equação de estado  $\dot{X} = A X + B U$ 
```

- Script Modos de vibração

```
clear
```

```
close all
```

```
%
```

```
% Dados
```

```
%% Dados da ferramenta %%
```

```
%
```

```
k=100000; %rigidez fictícia da mola equivalente referente a ferramenta
```

```
E = 6.43e+11; %modulo de young N/m^2 para barras carbeto de Tungstênio
```

```
L = 270e-3; % comprimento da barra (m)
```

```
Le = L/2;
```

```
d = 25e-3; %diametro da ferramenta em m
```

```
ro = 15630; %massa específica (kg/m3)
```

```
A = 490.87e-6; %area da seção transversal (m^2)
```

```
I = (pi*(d/2)^4)/4; %momento de inércia (m^4)
```

```
alpha = 0.1;
```

```
beta = 0.1;
```

```

coefk = E*I/(Le*Le*Le);

K = coefk*[12 6*Le -12 6*Le;6*Le 4*Le*Le -6*Le 2*Le*Le;-12 -6*Le 24 0;6*Le 2*Le*Le 0
8*Le*Le];

%

coefm = ro*A*Le/420;

M = coefm*[156 22*Le 54 -13*Le;22*Le 4*Le*Le 13*Le -3*Le*Le;54 13*Le 312 0;-13*Le -
3*Le*Le 0 8*Le*Le];

%

% Codigo para traçado dos modos de vibraçao

%

[vet,val] = eig(K,M)

%vet=vet/1.0e+009;

u1 = vet(1:4,1)/vet(1,1);
u2 = vet(1:4,2)/vet(1,2);
u3 = vet(1:4,3)/vet(1,3);
u4 = vet(1:4,4)/vet(1,4);

x = [0:0.001:L];

n = length(x);

for i = 1:n

    if x(i) < Le

        xL = x(i)/Le;

        psi1 = 1 - 3*xL*xL + 2*xL*xL*xL;

        psi2 = x(i) - 2*Le*xL*xL + Le*xL*xL*xL;

        psi3 = 3*xL*xL - 2*xL*xL*xL;

        psi4 = -Le*xL*xL + Le*xL*xL*xL;

```

```

y1(i) = psi3*u1(3) + psi4*u1(4) + psi1*u1(1) + psi2*u1(2);
y2(i) = psi3*u2(3) + psi4*u2(4) + psi1*u2(1) + psi2*u2(2);
y3(i) = psi3*u3(3) + psi4*u3(4) + psi1*u3(1) + psi2*u3(2);
y4(i) = psi3*u4(3) + psi4*u4(4) + psi1*u4(1) + psi2*u4(2);

```

```

else

```

```

xL = (x(i)-Le)/Le;
psi1 = 1 - 3*xL*xL + 2*xL*xL*xL;
psi2 = x(i)-Le - 2*Le*xL*xL + Le*xL*xL*xL;
psi3 = 3*xL*xL - 2*xL*xL*xL;
psi4 = -Le*xL*xL + Le*xL*xL*xL;
y1(i) = psi3*0 + psi4*0 + psi1*u1(3) + psi2*u1(4);
y2(i) = psi3*0 + psi4*0 + psi1*u2(3) + psi2*u2(4);
y3(i) = psi3*0 + psi4*0 + psi1*u3(3) + psi2*u3(4);
y4(i) = psi3*0 + psi4*0 + psi1*u4(3) + psi2*u4(4);

```

```

end

```

```

end

```

```

figure (1)

```

```

plot(x,y1)

```

```

axis([0 L -5 5]);

```

```

text(0.01,4,'Primeiro modo de vibraçao da ferramenta')

```

```

line([0 L],[0 0])

```

```

figure (2)

```

```

plot(x,y2)

```

```

axis([0 L -5 5]);

```

```

text(0.01,4,'Segundo modo de vibraçao da ferramenta')

```

```

line([0 L],[0 0])

```

```

figure (3)

```

```

plot(x,y3)

```

```
axis([0 L -5 5]);  
text(0.01,4,'Terceiro modo de vibraçao da ferramenta')  
line([0 L],[0 0])  
figure (4)  
plot(x,y4)  
axis([0 L -5 5]);  
text(0.01,4,'Quarto modo de vibraçao da ferramenta')  
line([0 L],[0 0])
```