



# Introdução à Mecânica dos Fluidos

Prof. Carlos Eduardo Catunda

PARTE - 1/2

Material disponível em:

<http://www.cefet-rj.br/index.php/demec-downloads>



# Ementa

1. Definições e Propriedades dos fluídos.
2. Estática dos fluídos.
3. Cinemática dos Fluidos.
4. Equação da Energia ou de Bernoulli.
5. Escoamento de fluidos incompressíveis e compressíveis.
6. Análise dimensional e semelhança mecânica.

# Objetivos Gerais / Objetivos Específicos

1. Compreender os princípios que fundamentam a estática dos fluídos.
  - Conceituar as propriedades básicas dos fluídos.
  - Fundamentar elementos básicos de fluidostática. Entender e aplicar: teorema de Stevin, carga de pressão, lei de pascal e medidores de pressão.
  - Identificar as equações que regem empuxo e estabilidade de corpos flutuantes
2. Compreender os princípios que fundamentam a cinemática e dinâmica dos fluídos bem como suas aplicações em processos de engenharia .
  - Caracterizar a cinemática dos fluídos e suas aplicações em escoamentos compressíveis e incompressíveis.
  - Conceituar e utilizar análise dimensional aplicada a equações de escoamento.
  - Estudar o movimento dos fluidos, permitindo a compreensão de medidores de vazão e de velocidade.

## Objetivos Gerais / Objetivos Específicos

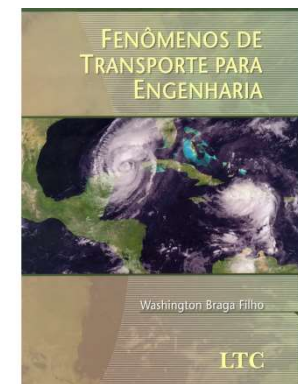
3. Desenvolver capacidade de selecionar e aplicar esses conceitos em projetos de instalações. Aprender suas aplicações em processos de engenharia e problemas envolvendo controle dos parâmetros estudados.
  - Calcular a perda de carga em tubulações.
  - Dimensionar uma instalação hidráulica básica;
  - Estudar a teoria dos modelos e evidenciar a vantagem de estudar um fenômeno físico através de um modelo, normalmente em escala reduzida.

# Sumário

1. Introdução e Comentários Preliminares
2. Conceitos Fundamentais e Definições
3. Estática dos Fluidos
4. Equações Básicas, na Forma Integral, para um Volume de Controle
5. Introdução a Análise Diferencial dos Movimentos dos Fluidos
6. Escoamento Incompressível de Fluidos Não Viscosos
7. Análise Dimensional e Semelhança
8. Escoamento Viscoso, Incompressível, Interno
9. Escoamento Viscoso, Incompressível, Externo
10. Escoamento em Canais Abertos
11. Máquinas de Fluxo
12. Escoamento Compressível, Permanente, Unidimensional

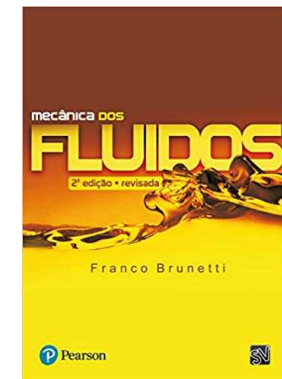
# Bibliografia

1. Fox, R. W. **Introdução à Mecânica dos Fluidos** Editora LTC – 8ªed
2. BRAGA FILHO, Washington. **Fenômenos de transporte para engenharia**. Rio de Janeiro: LTC, 2006
3. WHITE, Frank M. **Mecânica dos fluidos**. 4. ed. Rio de Janeiro: McGraw-Hill, 2005



## Bibliografia Complementar

BRUNETTI, Franco. **Mecânica dos fluidos**. São Paulo: Prentice-Hall, 2009.



# Bibliografia Complementar

1. Assy, Tufi Mamed. Mecanica dos fluidos: fundamentos e aplicações. São Paulo: LTC, 2004.
2. AZEVEDO NETTO, José Martiniano de. Manual de hidráulica. 8. ed. São Paulo: E. Blücher, 2007.
3. BAPTISTA, Márcio Benedito; COELHO, Márcia Maria Lara Pinto. Fundamentos de engenharia hidráulica. 2. ed. rev. Belo Horizonte: UFMG, 2006.
4. Cattani, Mauro Sergio Dorsa. Elementos de mecânica dos fluidos. São Paulo: E. Blucher, 2005.
5. GILES, Ranald V.; EVETT, Jack B.; LIU, Cheng. Mecânica dos fluidos e hidráulica. Tradução Luiz Liske. 2. ed. São Paulo: Makron, c1997

# Capítulo 1 – Introdução e Comentários Preliminares

Objetivos:

≡ Será apresentada neste capítulo uma breve descrição dos principais fenômenos e equipamentos de processos que utilizam conceitos de mecânica dos fluidos. O objetivo é familiarizar o estudante com estes fenômenos, equipamentos e termos.

- ≡ 1.1 Escopo da Mecânica dos Fluidos
- ≡ 1.2 Definição de um Fluido
- ≡ 1.3 Equações Básicas
- ≡ 1.4 Métodos de Análise
- ≡ 1.5 Dimensões e Unidades



# 1.1 Escopo da Mecânica dos Fluidos

Como o nome indica, a mecânica dos fluidos é o estudo de fluidos em **repouso ou em movimento**. Ela tem sido tradicionalmente aplicada em áreas tais como:

- o projeto sistemas de canal,
- dique e represa;
- o projeto de bombas,
- compressores,
- tubulações e dutos usados nos sistemas de água e condicionamento de ar de casas e edifícios,
- sistemas de bombeamento necessários na indústria química;
- aerodinâmicas de automóveis e aviões sub e supersônicos;
- desenvolvimento de muitos diferentes medidores de vazão, tais como os medidores de bombas de gás.

## 1.1 Escopo da Mecânica dos Fluidos

Como as áreas citadas anteriormente ainda são extremamente importantes (veja, por exemplo, a ênfase atual dada à aerodinâmica dos carros), a mecânica dos fluidos é realmente uma disciplina de “**alta tecnologia**” ou “de tope”. Ela permitiu o desenvolvimento de muitos campos instigantes no último quarto de século.

Alguns exemplos incluem questões sobre **meio ambiente e energia** (por exemplo, contenção de derramamento de óleos, turbinas eólicas de grande escala, **geração de energia** a partir de ondas do oceano, aspectos **aerodinâmicos de grandes edificações**, mecânica dos fluidos da atmosfera e do oceano e de **fenômenos atmosféricos** como tornados, furacões e tsunamis); **biomecânica** (por exemplo, corações e válvulas artificiais e outros órgãos como o fígado; compreensão da mecânica dos fluidos do sangue, líquido sinovial das juntas, os sistemas respiratório, circulatório e urinário); **esportes** (projeto de bicicletas e capacetes de bicicleta, esquis, vestimentas para corrida e natação, a aerodinâmica de bolas de golfe, tênis e futebol);...

## 1.1 Escopo da Mecânica dos Fluidos

...“**fluidos inteligentes**” (por exemplo, em sistemas de suspensão automotiva para otimizar o movimento sobre todas as condições do terreno, uniformes militares contendo uma camada de fluido que é “mole” até o combate, quando então ela pode tornar-se firme para dar força e proteção ao soldado, líquidos de lentes com propriedades parecidas às humanas para uso em câmaras e telefones celulares); e **microfluidos** (por exemplo, para aplicações extremamente precisas de medicações).



### Importante!

Esta é apenas uma pequena amostragem de novos campos de aplicação da mecânica dos fluidos. Eles ilustram como esta disciplina ainda é altamente relevante, e como os seus horizontes estão se ampliando, ainda que ela exista há milhares de anos.

# 1.1 Escopo da Mecânica dos Fluidos

## Aplicações diversas

A mecânica dos Fluidos está presente em

- Climatologia
- Meio Ambiente
- Veículos: automóveis, trens , aviões, navios, etc.
- Medicina e Fisiologia
- Esportes e recreação
- Muitos outros!!!

# 1.1 Escopo da Mecânica dos Fluidos

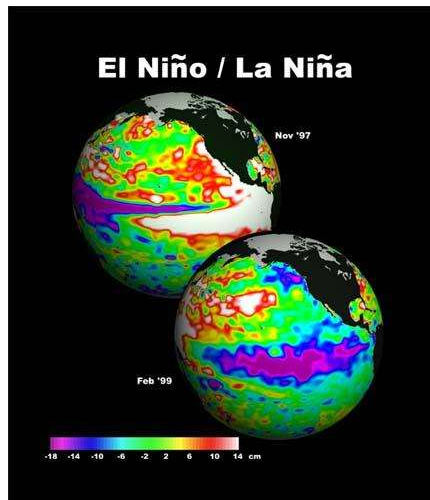
## Exemplos e Aplicações



*Tornados*



*Tempestades*



*Fenômenos Climáticos*



*Furacões*

# 1.1 Escopo da Mecânica dos Fluidos

## Exemplos e Aplicações



*Poluição atmosférica*



*Hidrologia*

# 1.1 Escopo da Mecânica dos Fluidos

## Exemplos e Aplicações



*Aviões*



*Trens*



*Navios*



*Submarinos*

# 1.1 Escopo da Mecânica dos Fluidos

## Exemplos e Aplicações



*Coração artificial*



*Respirador artificial*



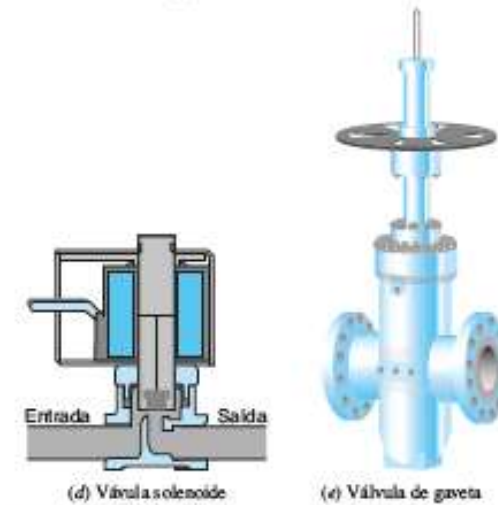
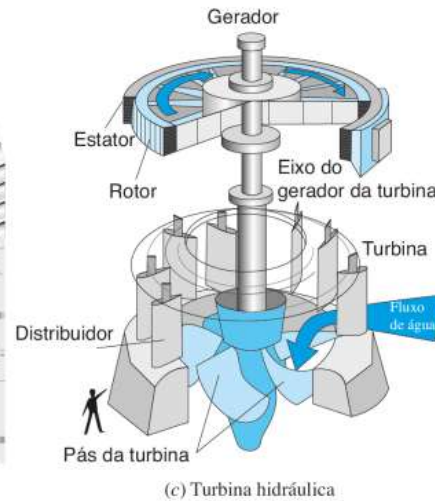
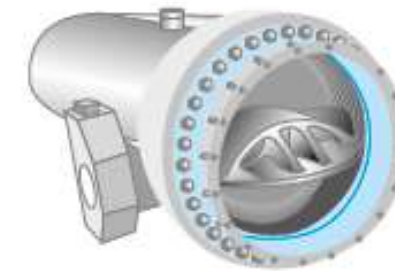
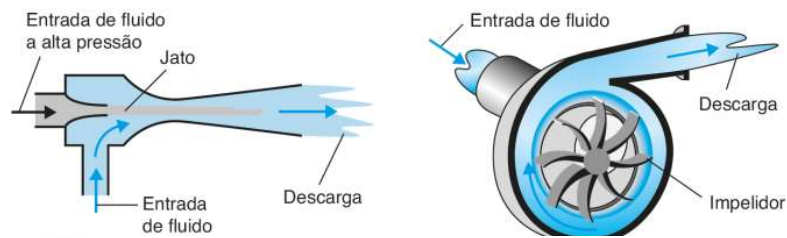
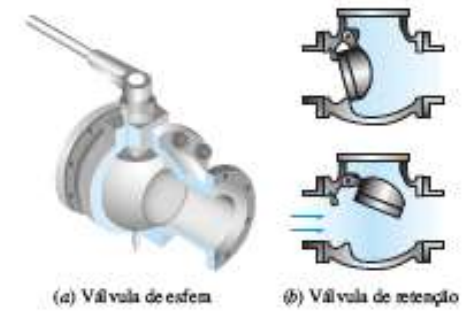
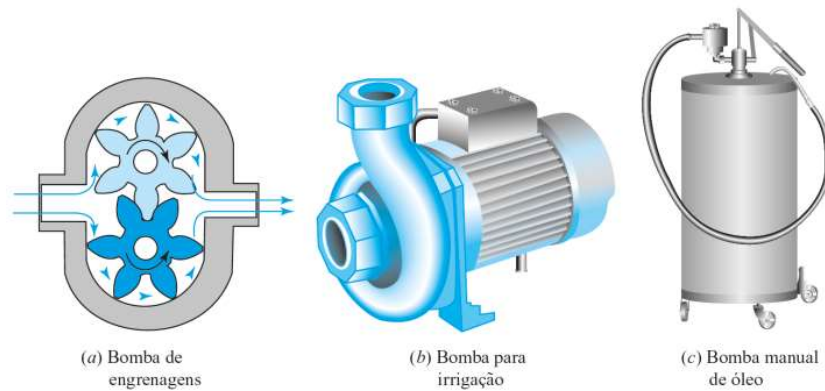
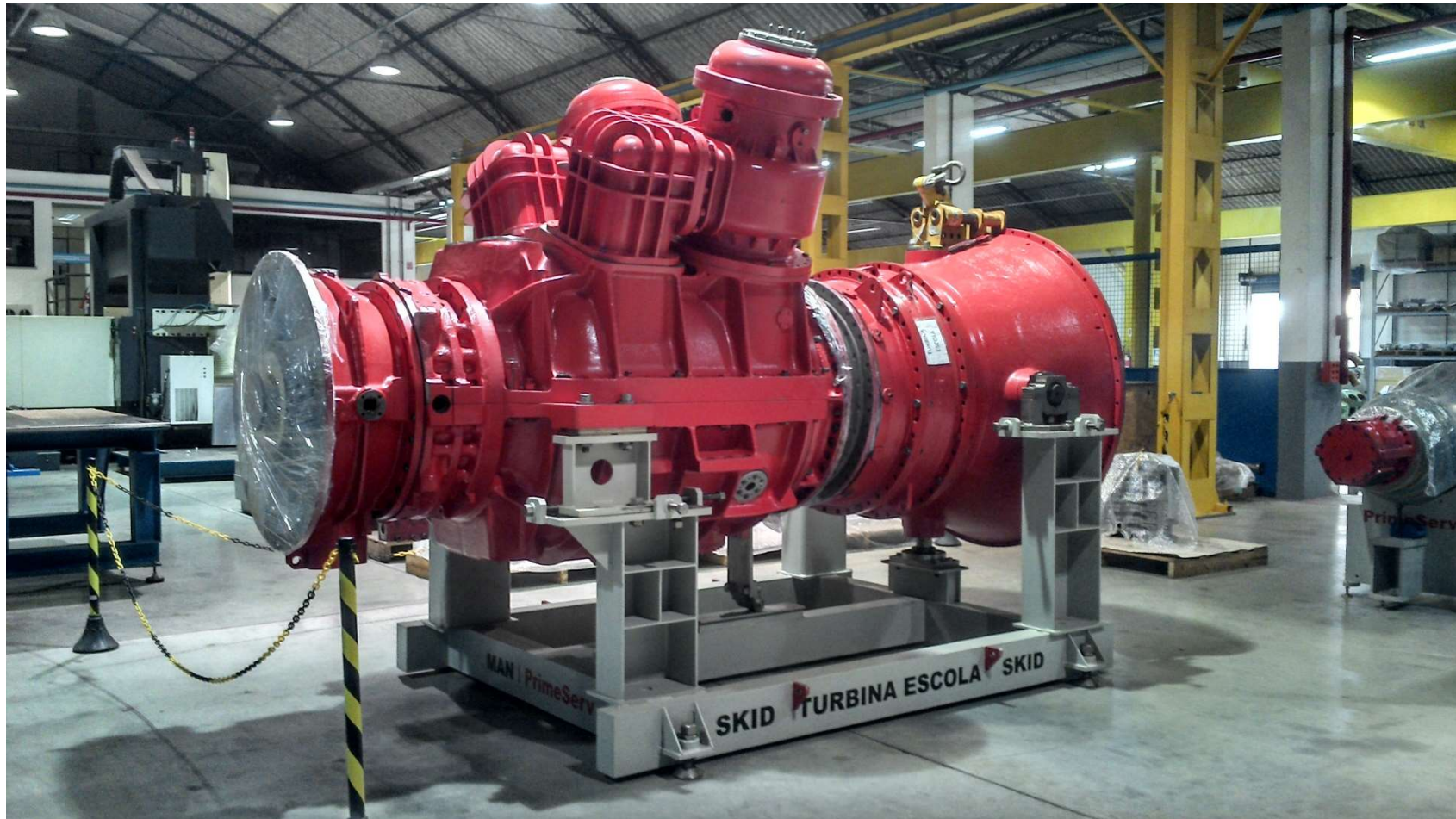
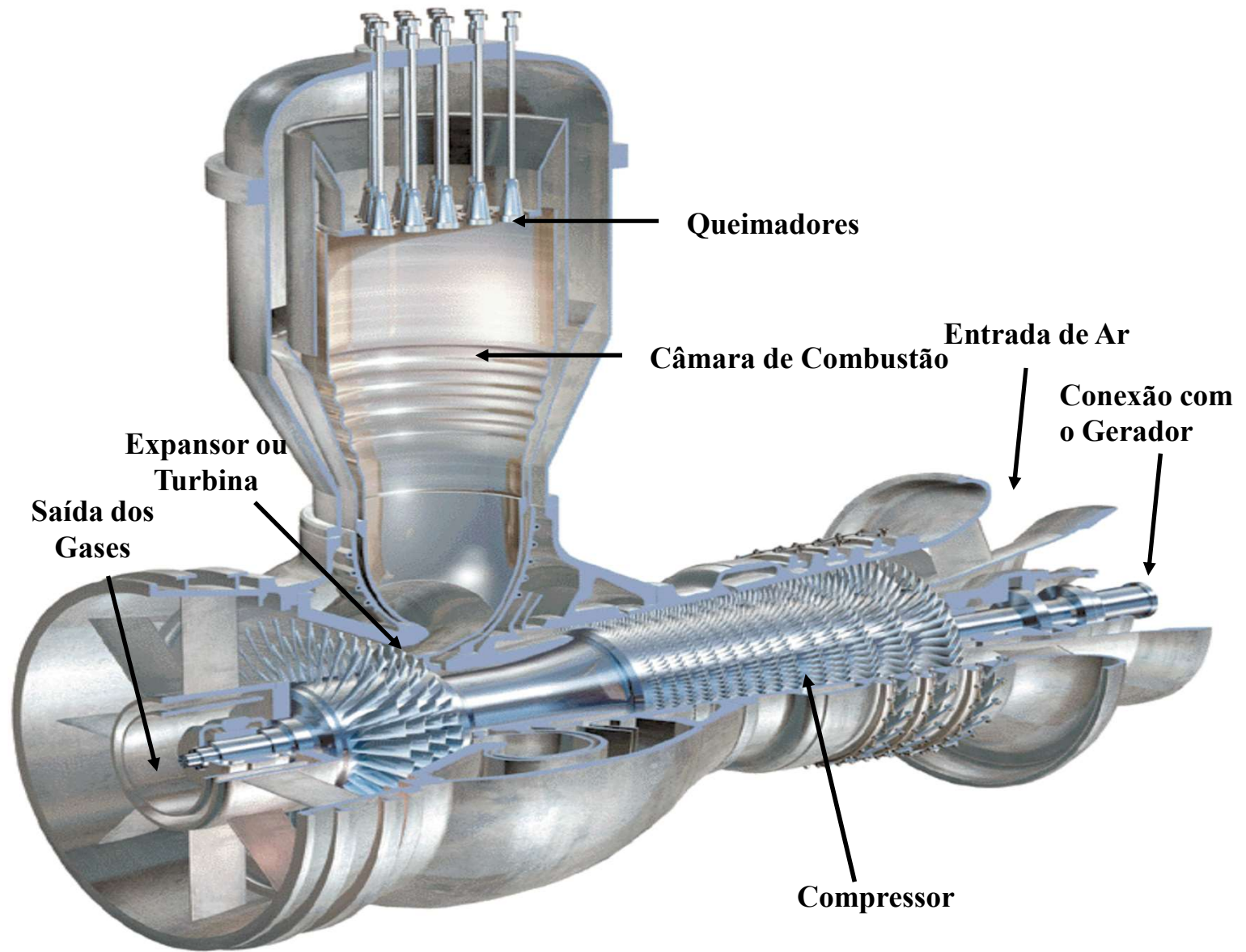


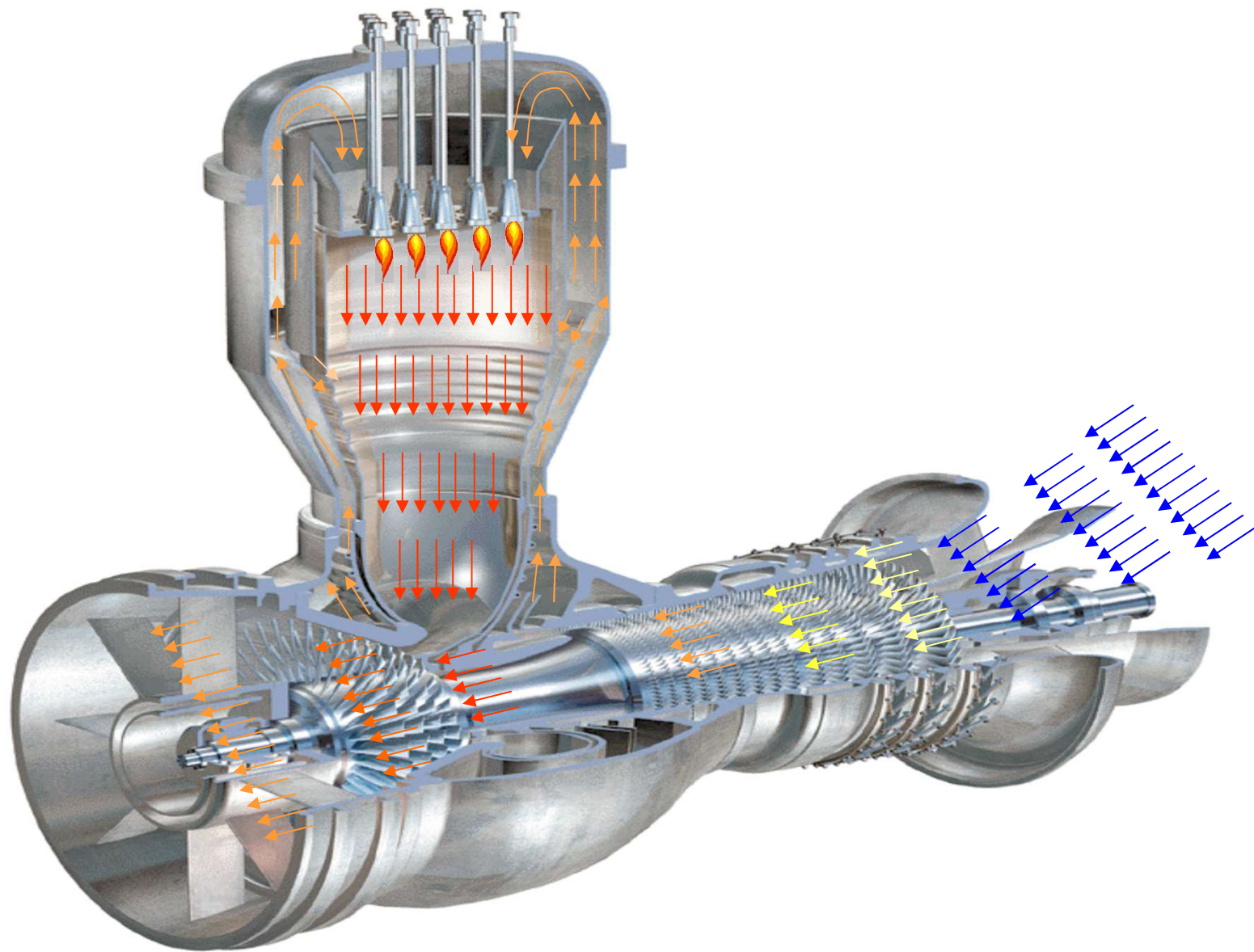
Figura 4.21  
Exemplos de turbinas.

Figura 4.17  
Diversos tipos de válvulas.

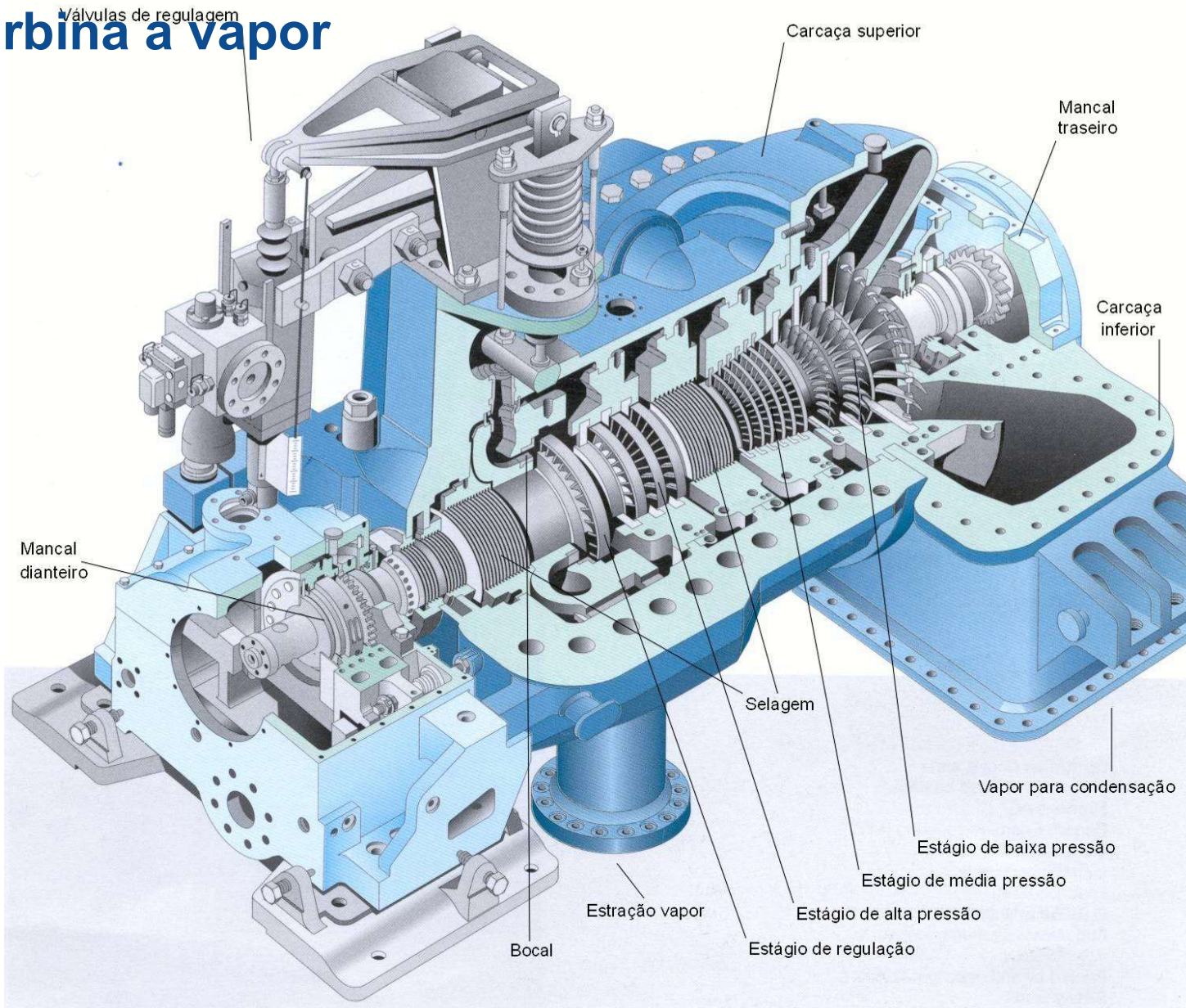
## Turbina a Gás







# Turbina a vapor



# Turbina a vapor



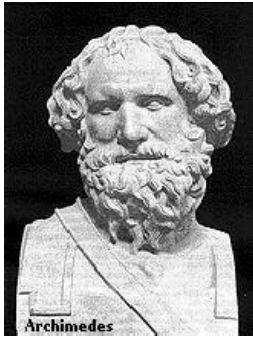
# Caldeiras – Recuperadora REVAP



# 1.1 Escopo da Mecânica dos Fluidos

## História - As Faces da Mecânica dos Fluidos

... E de onde veio tudo isso???



*Arquimedes*  
287-212AC



*Newton*  
1642-1727



*Leibniz*  
1646-1716



*Bernoille*  
1667-1748



*Euler*  
1707-1783



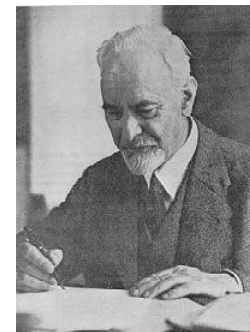
*Navier*  
1785-1836



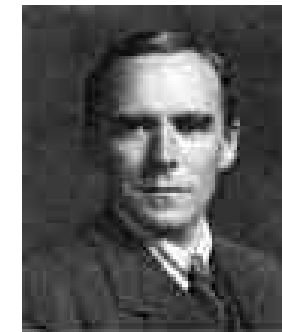
*Stokes*  
1819-1903



*Reynolds*  
1842-1912



*Prandtl*  
1875-1953



*Taylor*  
1886-1975



## 1.2 Definição de um Fluido

Nós temos um sentimento comum quando trabalhamos com um fluido que é oposto àquele do trabalho com um sólido: fluidos tendem a escoar quando interagimos com eles (por exemplo, quando você agita seu café da manhã); sólidos tendem a se deformar ou dobrar (por exemplo, quando você bate sobre um teclado, as molas sob as teclas se comprimem).

Os engenheiros necessitam de uma definição mais formal e precisa de um fluido: **Um fluido é uma substância que se deforma continuamente sob a aplicação de uma tensão de cisalhamento (tangencial), não importando o quão pequeno seja o seu valor.** Como o movimento do fluido continua sobre a aplicação dessa tensão, definimos um fluido também como uma substância que não pode sustentar uma tensão de cisalhamento quando em repouso.

## 1.2 Definição de um Fluido

Os engenheiros necessitam de uma definição mais formal e precisa de um fluido:.



### Importante!

Um fluido é uma substância que se deforma continuamente sob a aplicação de uma tensão de cisalhamento (tangencial), não importando o quão pequeno seja o seu valor.

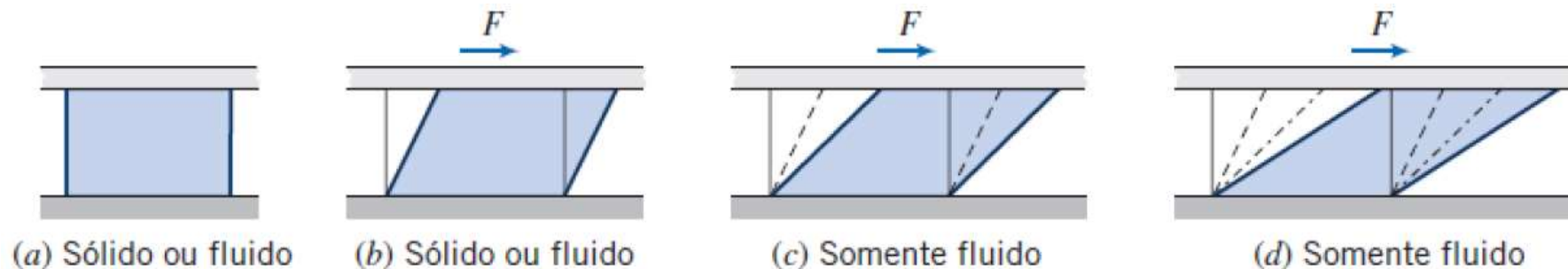


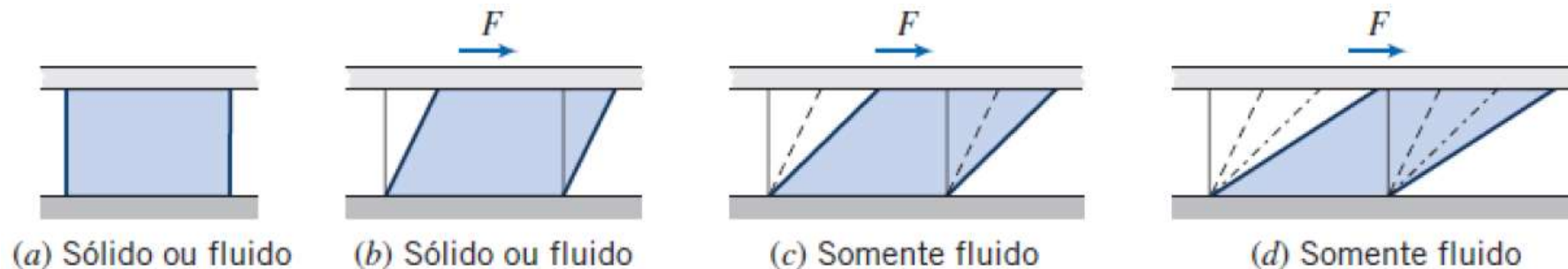
Fig. 1.1 Diferença em comportamento de um sólido e um líquido devido à força de cisalhamento.

Assim, líquidos e gases (ou vapores) são as formas, ou fases, que os fluidos podem se apresentar.

## 1.2 Definição de um Fluido

Podemos ver a diferença entre o comportamento de um sólido e um fluido na Fig. 1.1. Se colocarmos uma espécie de uma ou da outra substância entre dois planos (Fig. 1.1a), e depois aplicarmos uma força de cisalhamento  $F$ , cada uma sofrerá uma deformação inicial (Fig. 1.1b); contudo, ao passo que um sólido ficará em repouso (considerando que a força não seja suficientemente grande para levá-lo além do seu limite elástico), um fluido continuará se deformando (Fig. 1.1c, Fig. 1.1d, etc.) enquanto a força for aplicada.

Note que um fluido em contato com uma superfície sólida não desliza sobre ela. O fluido tem a mesma velocidade da superfície por causa da condição de não deslizamento, que é um fato experimental.



**Fig. 1.1** Diferença em comportamento de um sólido e um líquido devido à força de cisalhamento.

## 1.2 Definição de um Fluido

O tamanho da deformação do sólido depende do **módulo de rigidez**  $G$  do sólido; enquanto que a razão de deformação do fluido depende da **viscosidade**  $\mu$  do fluido.

Referimos aos sólidos como **elásticos** e aos fluidos como **viscosos**.

A ideia de que substâncias podem ser classificadas como um sólido ou um líquido serve para a maioria das substâncias, mas diversas substâncias exibem tanto rigidez quanto atrito; estas substâncias são conhecidas como viscoelásticas.

## 1.3 Equações Básicas

A análise de qualquer problema de mecânica dos fluidos inclui, necessariamente, o estabelecimento das leis básicas que governam o movimento do fluido. São elas:

1. A conservação da massa
2. A segunda lei do movimento de Newton
3. O princípio da quantidade de movimento angular
4. A primeira lei da termodinâmica
5. A segunda lei da termodinâmica

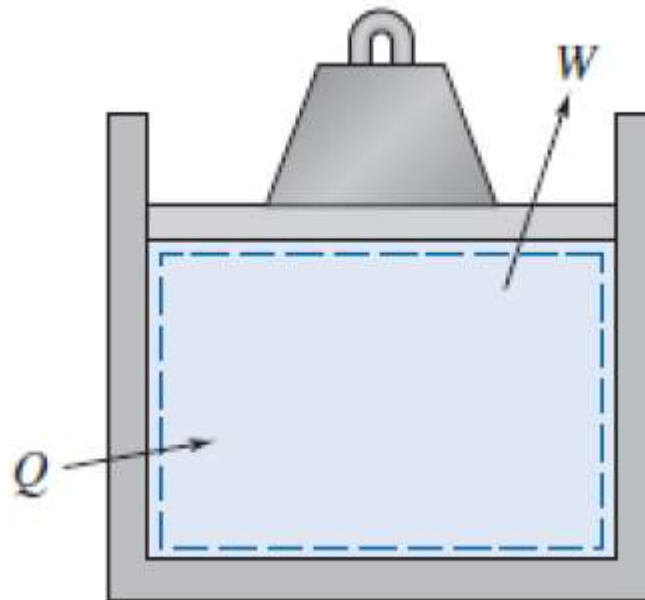
Nem todas as leis básicas são necessárias para resolver um problema qualquer. **As leis básicas com as quais lidaremos são as mesmas usadas na mecânica e na termodinâmica.**



## Exemplo

### Aplicação da primeira Lei a um sistema fechado – Exemplo 1.1

Um dispositivo cilindro-pistão contém 0,95 kg de oxigênio inicialmente a uma temperatura de 27°C e a uma pressão de 150 kPa (absoluta). Calor é adicionado ao gás até ele atingir uma temperatura de 627°C. Determine a quantidade de calor adicionado durante o processo.





# Exemplo

## Aplicação da primeira Lei a um sistema fechado – Exemplo 1.1

**Dados:** Cilindro-pistão contendo  $O_2$ ,  $m = 0,95$  kg.

$$T_1 = 27^\circ\text{C}$$

**Determinar:**  $Q_{1\rightarrow 2}$ .

**Solução:**  $p = \text{constante} = 150$  kPa (abs.)

Estamos lidando com um sistema,  $m = 0,95$  kg.

**Equação básica:** Primeira lei para o sistema,  $Q_{12} - W_{12} = E_2 - E_1$

**Considerações:** (1)  $E = U$ , visto que o sistema é estacionário.  
(2) Gás ideal com calores específicos constantes.

Com as considerações acima,

$$E_2 - E_1 = U_2 - U_1 = m(u_2 - u_1) = mc_v(T_2 - T_1)$$

O trabalho realizado durante o processo é o da fronteira em movimento

$$W_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p dV = p(V_2 - V_1)$$

Para um gás ideal,  $pV = mRT$ . Assim,  $W_{12} = mR(T_2 - T_1)$ . Então, da equação da primeira lei,

$$Q_{12} = E_2 - E_1 + W_{12} = mc_v(T_2 - T_1) + mR(T_2 - T_1)$$

$$Q_{12} = m(T_2 - T_1)(c_v + R)$$

$$Q_{12} = mc_p(T_2 - T_1) \quad \{R = c_p - c_v\}$$

Do Apêndice, Tabela A.6, para  $O_2$ ,  $c_p = 909,4$  J / (kg · K). Resolvendo para  $Q_{12}$ , obtemos

$$Q_{12} = 0,95 \text{ kg} \times 909 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \times 600 \text{ K} = 518 \text{ kJ} \leftarrow$$

## 1.4 Métodos de Análise

O primeiro passo na resolução de um problema é definir o sistema que você está tentando analisar.

Na Mecânica dos Fluidos utilizaremos um **sistema ou um volume de controle**, dependendo do problema que estiver sendo resolvido; sistema fechado e sistema aberto, respectivamente (na Termodinâmica). Em mecânica dos fluidos, estaremos principalmente interessados na **conservação da massa** e na, em **forças** e no **movimento** das partículas.

Devemos estar sempre atentos ao conceito que estaremos utilizando, sistema ou volume de controle, pois cada um conduz a diferentes expressões matemáticas das leis básicas.



## 1.4 Métodos de Análise

### 1.4.1. Sistema de Controle

Um **sistema** é definido como uma **quantidade de massa fixa e identificável**; o sistema é separado do ambiente pelas suas fronteiras. As fronteiras do sistema podem ser fixas ou móveis; contudo, nenhuma massa cruza essas fronteiras.

No clássico conjunto cilindro-pistão da termodinâmica, Fig. 1.2, o gás no cilindro é o sistema. Se o gás for aquecido, o pistão levantará o peso; a fronteira do sistema move-se então; calor e trabalho poderão cruzar as fronteiras do sistema, mas a quantidade de matéria dentro delas permanecerá constante. **Nenhuma massa cruza as fronteiras do sistema.**

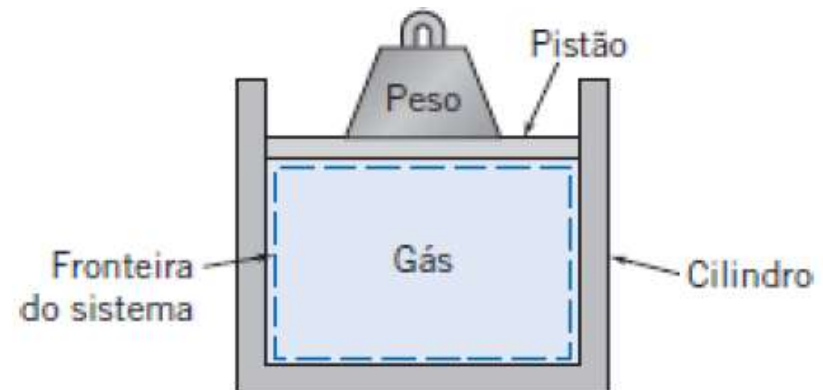


Fig. 1.2 Conjunto cilindro-pistão.

## 1.4 Métodos de Análise

### 1.4.2. Volume de Controle

Entretanto, na mecânica dos fluidos, normalmente estamos interessados em escoamentos de fluidos através de dispositivos como compressores, turbinas, tubulações, bocais, entre outros. Nesses casos, é difícil focar a atenção em uma quantidade de massa fixa identificável. É muito mais conveniente, para análise, concentrar a atenção sobre um **volume no espaço** através do qual o fluido escoa. Por isso, usamos o enfoque do volume de controle.

Um volume de controle é um volume arbitrário no espaço através do qual o fluido escoa. A fronteira geométrica do volume de controle é denominada superfície de controle. A superfície de controle pode ser real ou imaginária; ela pode estar em repouso ou em movimento.

## 1.4 Métodos de Análise

### 1.4.2. Volume de Controle

A Fig. 1.3 mostra um escoamento em uma junção de tubos com uma superfície de controle delimitada pela linha tracejada. Note que algumas regiões dessa superfície correspondem a **limites físicos** (as paredes dos tubos) e outras (regiões , 1, 2 e 3) são **imaginárias** (entradas ou saídas).

É sempre importante tomar cuidado na seleção de um volume de controle, pois a escolha tem um grande efeito sobre a formulação matemática das leis básicas.

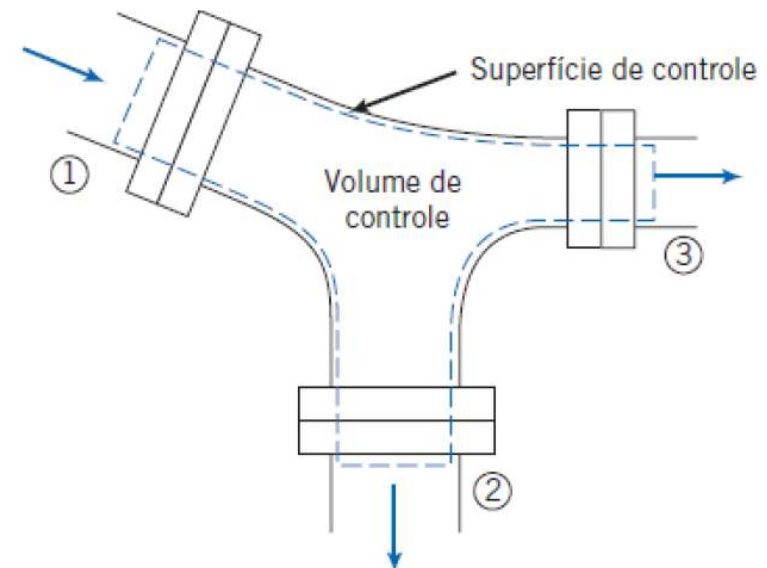


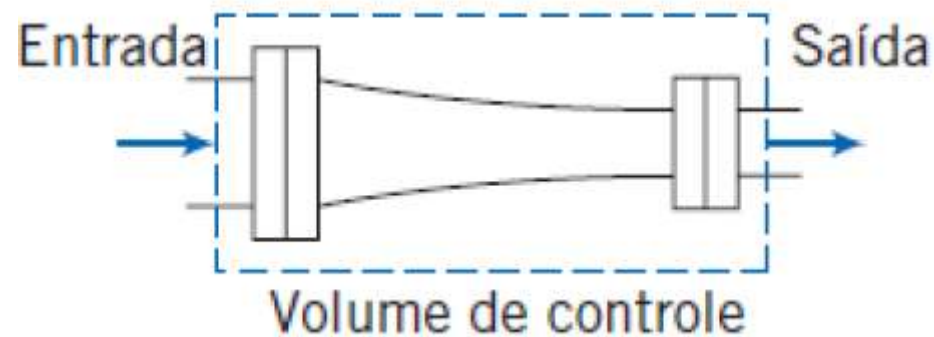
Fig. 1.3 Escoamento de um fluido através de uma junção de tubos.



## Exemplo

### Conservação da massa no Volume de Controle – Exemplo 1.2

Um trecho de redução em um tubo de água tem um diâmetro de entrada de 50mm e diâmetro de saída de 30mm. Se a velocidade na entrada (média através a área de entrada) é 2,5m/s, encontre a velocidade de saída.





## Exemplo

### Conservação da massa no Volume de Controle – Exemplo 1.2

Assim, a vazão mássica é:

$$\dot{m} = \rho VA$$

Aplicando a conservação da massa, do nosso estudo de termodinâmica,

$$\rho V_i A_i = \rho V_e A_e$$

(Nota:  $\rho_i = \rho_e = \rho$  de acordo com a primeira consideração feita.)

(Nota: mesmo que nós já estejamos familiarizados com essa equação da termodinâmica, nós a deduziremos no Capítulo 4.)

Resolvendo para  $V_e$

$$V_e = V_i \frac{A_i}{A_e} = V_i \frac{\pi D_i^2 / 4}{\pi D_e^2 / 4} = V_i \left( \frac{D_i}{D_e} \right)^2$$

$$V_e = 2,7 \frac{\text{m}}{\text{s}} \left( \frac{50}{30} \right)^2 = 7,5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \leftarrow V_e$$

## 1.4 Métodos de Análise

### 1.4.3. Formulação Diferencial *versus* Integral

As leis básicas que aplicamos em nosso estudo da mecânica dos fluidos podem ser formuladas em termos de sistemas e volumes de controle **infinitesimais** ou **finitos**. Como você pode supor, as equações parecerão diferentes nos dois casos.

No primeiro caso (**infinitesimais**), as equações resultantes são **equações diferenciais**. A solução das equações diferenciais do movimento fornece uma maneira de determinar o comportamento detalhado do escoamento. Um exemplo pode ser a distribuição de pressão sobre a superfície de uma asa.

## 1.4 Métodos de Análise

### 1.4.3. Formulação Diferencial *versus* Integral

Frequentemente, a informação procurada **não requer um conhecimento detalhado do escoamento**. Muitas vezes estamos interessados no comportamento de um dispositivo **como um todo**; nestes casos, é mais apropriado empregar a **formulação integral** das leis básicas.

As formulações integrais, usando sistemas ou volumes de controle finitos, em geral têm **tratamento analítico mais fácil**.

## 1.4 Métodos de Análise

### 1.4.4. Métodos de Descrição

A mecânica lida quase que exclusivamente com sistemas; você já deve ter usado intensivamente as equações básicas aplicadas a uma quantidade de massa identificável e fixa.

Por outro lado, ao tentar analisar dispositivos termodinâmicos, muitas vezes você considerou necessário utilizar um volume de controle (sistema aberto). Claramente, o tipo de análise depende do problema em questão.

Quando é fácil acompanhar elementos de massa identificáveis (por exemplo, em mecânica de partícula), lançamos mão de um **método de descrição que acompanha a partícula**. Referimos a isso, usualmente, como o método de **descrição lagrangiano**.

Utiliza-se esta formulação lagrangiana para analisar um escoamento considerando que o fluido seja composto de um grande número de partículas cujos movimentos devem ser descritos.



## 1.4 Métodos de Análise

### 1.4.4. Métodos de Descrição

Entretanto, acompanhar o movimento de cada partícula fluida separadamente seria um terrível quebra-cabeça.

Consequentemente, uma descrição de partícula torna-se impraticável.

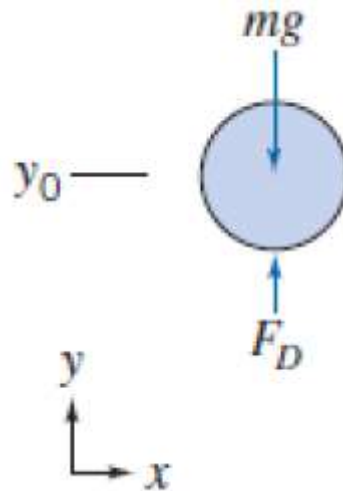
Assim, para analisar o escoamento de fluidos é conveniente, em geral, utilizar um tipo de descrição diferente. Particularmente, com a análise de volume de controle, convém usar o **campo de escoamento**, ou **método de descrição euleriano**, que foca as propriedades de um escoamento em um determinado ponto no espaço como uma função do tempo. No método de descrição euleriano, as propriedades do campo de escoamento são descritas como funções das coordenadas espaciais e do tempo.



## Exemplo

### Queda livre de uma bola ao ar – Exemplo 1.3

A resistência do ar (força de arrasto) sobre uma bola de 200 g em queda livre é dada por  $F_D = 2 \times 10^{-4} V^2$ , em que  $F_D$  é dada em newtons e  $V$  em metros por segundo. Se a bola for largada do repouso a 500 m acima do solo, determine a velocidade com que ela atinge o solo. Que porcentagem da velocidade terminal esse valor representa? (A *velocidade terminal* é a velocidade de regime permanente que um corpo em queda livre eventualmente atinge.)





## Exemplo

### Queda livre de uma bola ao ar – Exemplo 1.3

O movimento da bola é modelado pela equação

$$\Sigma F_y = ma_y = m \frac{dV}{dt}$$

Como  $V = V(y)$ , escrevemos  $\Sigma F_y = m \frac{dV}{dy} \frac{dy}{dt} = mV \frac{dV}{dy}$ . Então,

$$\Sigma F_y = F_D - mg = kV^2 - mg = mV \frac{dV}{dy}$$

Separando as variáveis e integrando,

$$\int_{y_0}^y dy = \int_0^V \frac{mV dV}{kV^2 - mg}$$
$$y - y_0 = \left[ \frac{m}{2k} \ln(kV^2 - mg) \right]_0^V = \frac{m}{2k} \ln \frac{kV^2 - mg}{-mg}$$

Aplicando os antilogaritmos, obtemos

$$kV^2 - mg = -mg e^{[(2k/m)(y - y_0)]}$$



## Exemplo

### Queda livre de uma bola ao ar – Exemplo 1.3

Resolvendo para  $V$ , achamos

$$V = \left\{ \frac{mg}{k} \left( 1 - e^{[(2k/m)(y - y_0)]} \right) \right\}^{1/2}$$

Substituindo valores numéricos com  $y = 0$ , resulta

$$V = \left\{ 0,2 \text{ kg} \times 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times \frac{\text{m}^2}{2 \times 10^{-4} \text{ N} \cdot \text{s}^2} \times \frac{\text{N} \cdot \text{s}^2}{\text{kg} \cdot \text{m}} \left( 1 - e^{[(2 \times 2 \times 10^{-4} / 0,2)(-500)]} \right) \right\}^{1/2}$$
$$V = 78,7 \text{ m/s}$$

Na velocidade terminal,  $a_y = 0$  e  $\Sigma F_y = 0 = kV_t^2 - mg$ .

$$\text{Então, } V_t = \left[ \frac{mg}{k} \right]^{1/2} = \left[ 0,2 \text{ kg} \times 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times \frac{\text{m}^2}{2 \times 10^{-4} \text{ N} \cdot \text{s}^2} \times \frac{\text{N} \cdot \text{s}^2}{\text{kg} \cdot \text{m}} \right]^{1/2}$$
$$= 99,0 \text{ m/s}$$

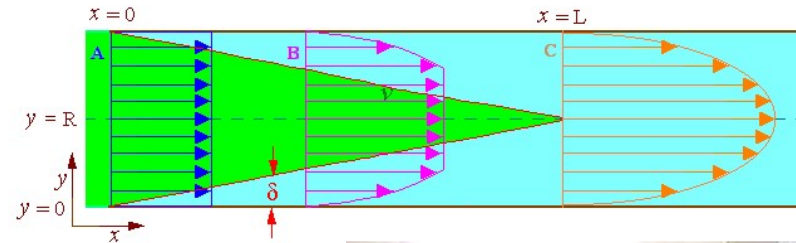
A razão entre a velocidade final real e a velocidade terminal é

$$\frac{V}{V_t} = \frac{78,7}{99,0} = 0,795, \text{ ou } 79,5\%$$

# 1.4 Métodos de Análise

## 1.4.5. Métodos de Análise

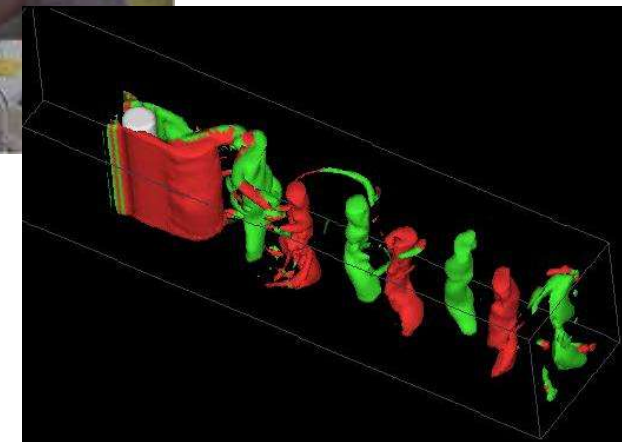
### 1. Analítica



### 2. Experimental



### 3. Computacional



## 1.4 Métodos de Análise

### 1.4.5. Métodos de Análise (**Analítica**)

- ≡ Formulação de um modelo matemático para descrever o problema;
- ≡ Envolve a análise diferencial e de Volume de Controle.
- ≡ Soluções exatas apenas para condições e geometrias simplificadas;
- ≡ Soluções aproximadas para problemas práticos:
- ≡ Relações empíricas usando dados experimentais

#### **Conteúdo:**

- ≡ Definição de Fluido e conceitos fundamentais;
- ≡ Hidrostática.
- ≡ Dinâmica dos fluidos;
  - ≡ Princípios de Continuidade, momentum e energia.
  - ≡ Equação de Euler; Bernoulli e Navier-Stokes
  - ≡ Cálculo de perda de carga em tubulações

## 1.4 Métodos de Análise

### 1.4.5. Métodos de Análise (Experimental)

- ≡ Formulação de um modelo em escala para descrever o problema;
- ≡ Relações empíricas usando dados experimentais



*Túnel de vento para criogênico da NASA*

*Túnel de vento tropical: Capaz de trabalhar em grande faixa de temperaturas e simular chuvas*

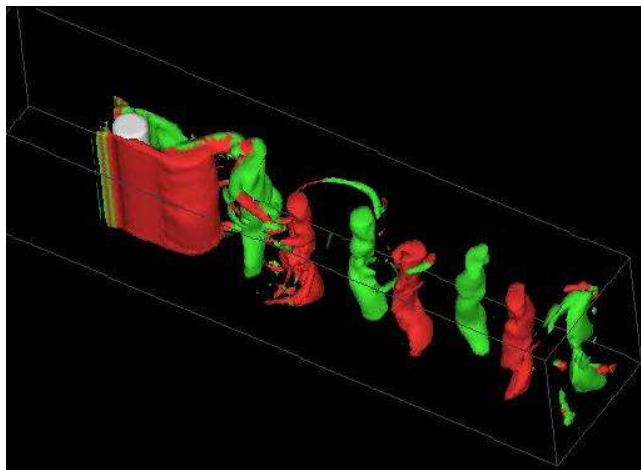


*Túnel de vento para indústria automobilística*

## 1.4 Métodos de Análise

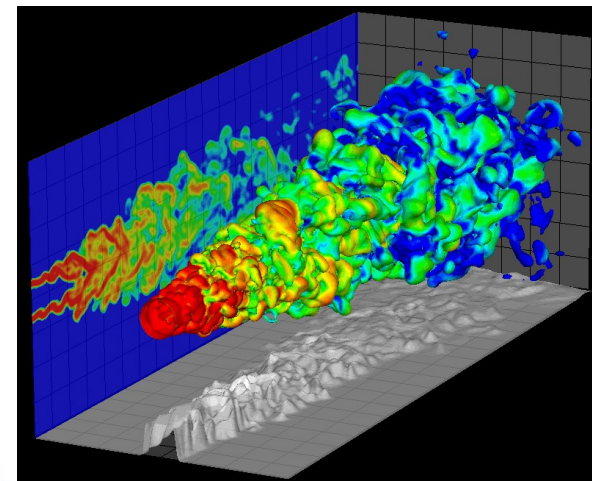
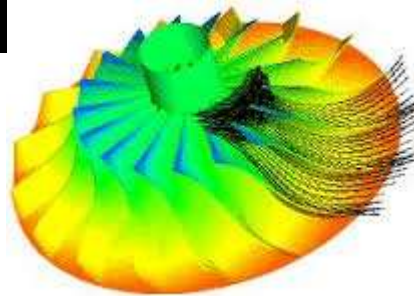
### 1.4.5. Métodos de Análise (Computacional)

- ≡ Formulação de um modelo matemático para descrever o problema;
- ≡ Envolve a análise computacional
- ≡ Soluções exatas para condições e geometrias complexas;



*Vórtices tridimensionais no escoamento após um cilindro*

*Escoamento em um rotor de uma bomba*



*Simulação de um jato turbulento*



## 1.5 Dimensões e Unidades

Referimo-nos a quantidades físicas tais como comprimento, tempo, massa e temperatura como **dimensões**. Em termos de um sistema particular de dimensões, todas as quantidades mensuráveis podem ser subdivididas em dois grupos — **quantidades primárias e quantidades secundárias**.

Referimo-nos a um pequeno grupo de dimensões básicas, a partir do qual todos os outros podem ser formados como quantidades primárias, para as quais estabelecemos arbitrariamente escalas de medida.

Quantidades secundárias são aquelas cujas dimensões são expressas em termos das dimensões das quantidades primárias.

## 1.5 Dimensões e Unidades

**Unidades** são os nomes (e módulos) arbitrários dados às dimensões primárias adotadas como padrões de medidas. Por exemplo, a dimensão primária de comprimento pode ser medida em unidades de metros, pés, jardas ou milhas.

Cada unidade de comprimento é relacionada com as outras por fatores de conversão de unidades (1 milha = 5280 pés = 1609 metros).

## 1.5 Dimensões e Unidades

### 1.5.1. Sistemas de Dimensões

Qualquer equação válida relacionando quantidades físicas deve ser dimensionalmente homogênea; cada termo da equação deve ter as mesmas dimensões. Reconhecemos que a segunda lei de Newton ( $F \propto m$ ) relaciona as quatro dimensões, F, M, L e t. Portanto, força e massa não podem ser selecionadas como dimensões primárias sem introduzir uma constante de proporcionalidade que tenha dimensões (e unidades).

**Comprimento e tempo são dimensões primárias em todos os sistemas dimensionais de uso corrente.**

Em alguns deles, a massa é tomada como uma dimensão primária.

Em outros, a força é selecionada como tal; um terceiro sistema escolhe ambas, a força e a massa, como dimensões primárias. Temos, assim, três sistemas básicos de dimensões correspondendo aos diferentes modos de especificar as dimensões primárias.

# 1.5 Dimensões e Unidades

## 1.5.1. Sistemas de Dimensões

No sistema a, a força  $[F]$  é uma dimensão secundária e a constante de proporcionalidade na segunda lei de Newton é adimensional.

No sistema b, a massa  $[M]$  é uma dimensão secundária, e mais uma vez a constante de proporcionalidade na segunda lei de Newton não tem dimensão.

*Tabela 1.1*

Sistemas de Unidades Mais Comuns

Sistemas de Dimensões	Sistema de Unidades	Força $F$	Massa $M$	Comprimento $L$	Tempo $t$	Temperatura $T$
a. MLtT	Sistema Internacional de Unidades (SI)	(N)	kg	m	s	K
b. FLtT	Gravitacional Britânico (GB)	lbf	(slug)	ft	s	°R
c. FMLtT	Inglês de Engenharia (EE)	lbf	lbm	ft	s	°R

# 1.5 Dimensões e Unidades

## 1.5.2. Sistemas de Unidades

Há mais de uma maneira de selecionar a unidade de medida para cada dimensão primária. Apresentaremos apenas os sistemas de unidades mais comuns na engenharia. A Tabela 1.1 mostra as unidades básicas assinaladas para as dimensões primárias. As unidades entre parênteses são aquelas destinadas à dimensão secundária.

*Tabela 1.1*

Sistemas de Unidades Mais Comuns

Sistemas de Dimensões	Sistema de Unidades	Força $F$	Massa $M$	Comprimento $L$	Tempo $t$	Temperatura $T$
a. MLtT	Sistema Internacional de Unidades (SI)	(N)	kg	m	s	K
b. FLtT	Gravitacional Britânico (GB)	lbf	(slug)	ft	s	°R
c. FMLtT	Inglês de Engenharia (EE)	lbf	lbm	ft	s	°R

# Unidades de Massa, Comprimento, Tempo e Força

Comprimento		Temperatura (T)					
1 mm = 0,001 m = 0,1 cm	1 ft = 12 in	1 K = 1 °C = 1,8 R = 1,8 F	1 R = (5/9) K				
1 cm = 0,01 = 10 mm = 0,3937 in	1 in = 2,54 cm = 0,0254 m	TC = TK - 273,15	TF = TR - 459,67				
1 m = 3,280 84 ft = 39,370 in	1 ft = 0,3048 m	= (TF - 32)/1,8	= 1,8 TC + 32				
1 km = 0,621 371 mi	1 mi = 1,609 344 km	TK = TR/1,8	TR = 1,8 TK				
1 mi = 1609,3 m (US statute)	1 yd = 0,9144 m	Pressão (P)					
Energia		1 Pa = 1 N/m <sup>2</sup> = 1 kg/m·s <sup>2</sup>	1 lbf/in <sup>2</sup> = 6,894 757 kPa				
1 J = 1 N·m = 1 kg·m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup>	1 lbf·ft = 1,355818	1 bar = 1,0 × 10 <sup>5</sup> Pa = 100 kPa					
1 J = 0,737 562 lbf·ft	J = 1,285 07 × 10 <sup>-3</sup> Btu	1 atm = 101,325 kPa	1 atm = 14,695 94 lbf/in <sup>2</sup>				
1 cal (Int.) = 4,186 81 J		= 1,013 25 bar	= 29 921 in Hg [32 °F]				
1 erg = 1,0 × 10 <sup>-7</sup> J	1 Btu (Int.) = 1,055 056 kJ	= 760 mm Hg [0 °C]	= 33,8995 ft H <sub>2</sub> O [4 °C]				
1 eV = 1,602 177 33 × 10 <sup>-19</sup> J	= 778,1693 lbf·ft	= 10,332 56 m H <sub>2</sub> O [4 °C]					
Força (F)		1 torr = 1 mm Hg [0 °C]					
1 N = 0,224 809 lbf	1 lbf = 4,448 222 N	1 mm Hg [0 °C] = 0,133 322 kPa	1 in Hg [0 °C] = 0,491 15 lbf/in <sup>2</sup>				
1 kgf = 9,806 65 N (1 kgf)		1 m H <sub>2</sub> O [4 °C] = 9,806 38 kPa	1 in H <sub>2</sub> O [4 °C] = 0,0361 26 lbf/in <sup>2</sup>				
Massa		Tabela 1.1 Prefixos das unidades do SI					
1 kg = 2,204 623 lbm	1 lbm = 0,453 592 kg	Fator	Prefixo	Símbolo			
1 ton = 1000 kg	1 slug = 14,5939 kg	10 <sup>12</sup>	tera	T	10 <sup>-3</sup>	milli	m
1 grain = 6,479 89 × 10 <sup>-5</sup> kg	1 ton = 2000 lbm	10 <sup>9</sup>	giga	G	10 <sup>-6</sup>	micro	μ
		10 <sup>6</sup>	mega	M	10 <sup>-9</sup>	nano	n
		10 <sup>3</sup>	quilo	k	10 <sup>-12</sup>	pico	p

Tabela 1.4. SI Unidades - Prefixos

## 1.5 Dimensões e Unidades

### 1.5.3. Consistência Dimensional

Em engenharia, nos esforçamos para que as equações e fórmulas tenham dimensões consistentes. Isto é, cada termo em uma equação e obviamente ambos os membros da equação, devem ser reduzíveis às mesmas dimensões.



Por exemplo, uma equação muito importante, que deduziremos mais tarde, é a equação de Bernoulli

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2$$

Essa equação é dimensionalmente consistente porque cada termo na equação pode ser reduzido às dimensões de  $L^2/t^2$  (as dimensões do termo de pressão são  $FL/M$ , mas da segunda lei de Newton encontramos  $F = ML/t^2$ , de forma que  $FL/M = ML^2/Mt^2 = L^2/t^2$ ).

# 1.5 Dimensões e Unidades

## Volume Específico e Massa Específica

- ≡ Volume Específico = volume ocupado por unidade de massa
- ≡ Massa Específica = massa associada à unidade de volume

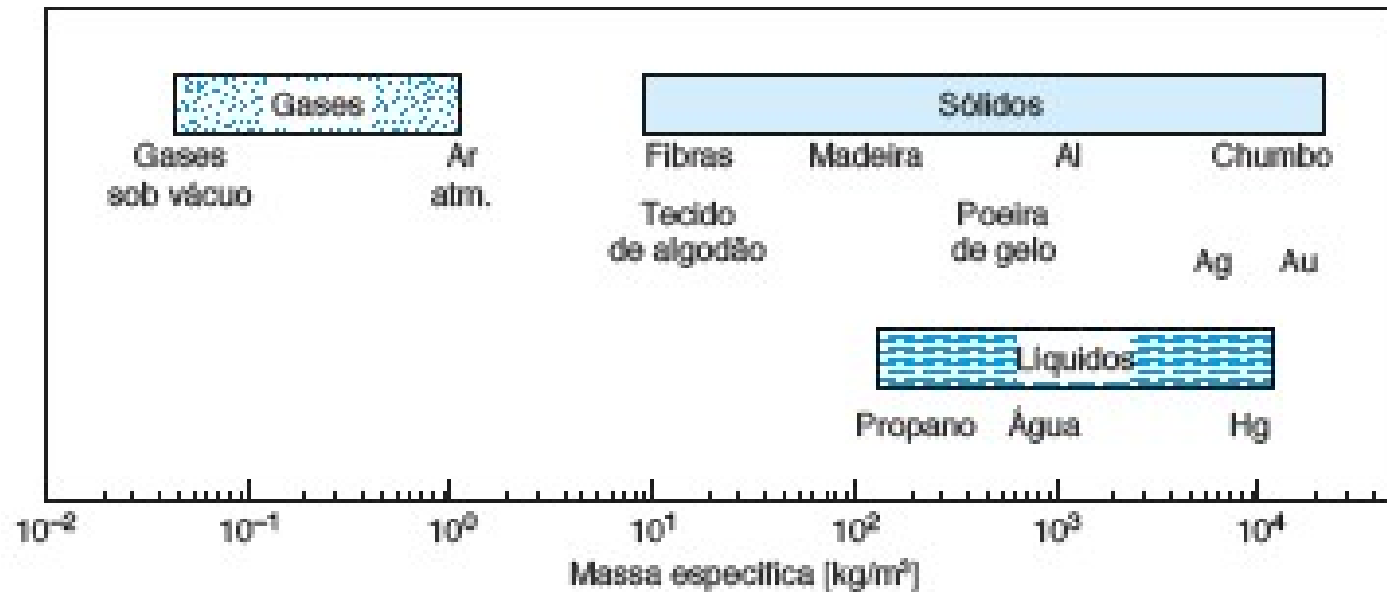


Figura 1.8  
Densidade de substâncias comuns.





## Exemplo

### Volume específico e massa específica

O recipiente mostrado na Figura abaixo, como volume interno de  $1\text{m}^3$ , contém  $0,12\text{m}^3$  de granito,  $0,15\text{m}^3$  de areia e  $0,2\text{m}^3$  de água líquida a  $25^\circ\text{C}$ . O restante do volume interno do recipiente ( $0,53\text{m}^3$ ) é ocupado por ar que apresenta massa específica igual a  $1,15\text{kg}/\text{m}^3$ . Determine o volume específico médio e a massa específica média da mistura contida no recipiente.

**Solução:** As definições de volume específico e massa específica são:

$$v = V/m \quad \text{e} \quad \rho = m/V = 1/v$$

A determinação das massas dos constituintes da mistura pode ser feita utilizando os valores de massa específica apresentados nas tabelas do Apên. A. Deste modo,

$$m_{\text{granito}} = \rho_{\text{granito}} V_{\text{granito}} = 2750 \times 0,12 = 330,0 \text{ kg}$$

$$m_{\text{areia}} = \rho_{\text{areia}} V_{\text{areia}} = 1500 \times 0,15 = 225,0 \text{ kg}$$

$$m_{\text{água}} = \rho_{\text{água}} V_{\text{água}} = 997 \times 0,2 = 199,4 \text{ kg}$$

$$m_{\text{ar}} = \rho_{\text{ar}} V_{\text{ar}} = 1,15 \times 0,53 = 0,6 \text{ kg}$$

A massa total de mistura é

$$m_{\text{total}} = m_{\text{granito}} + m_{\text{areia}} + m_{\text{água}} + m_{\text{ar}} = 755,0 \text{ kg}$$



Figura 1.9  
Esboço para o Exemplo 1.2.

# 1.5 Dimensões e Unidades

## Pressão

- ≡ força por unidade de área  $p = \frac{dF}{dA}$
- ≡ independente da orientação da superfície

A pressão num ponto de um fluido em equilíbrio é a mesma em todas as direções.

- ≡ **forças de pressão** sempre perpendiculares à superfície

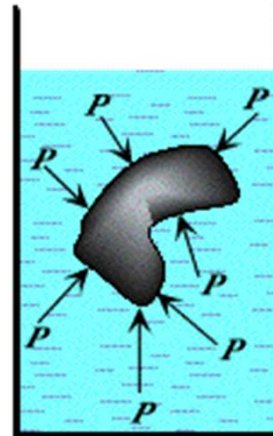
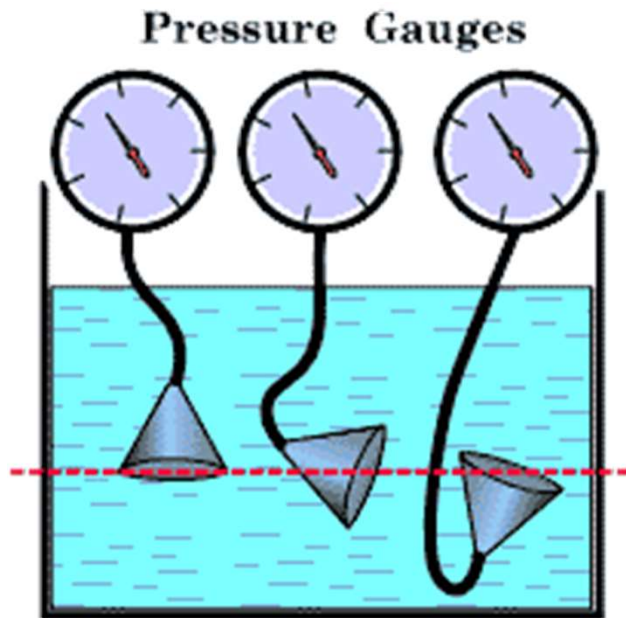


Figura 1.25  
Barômetro aneróide.

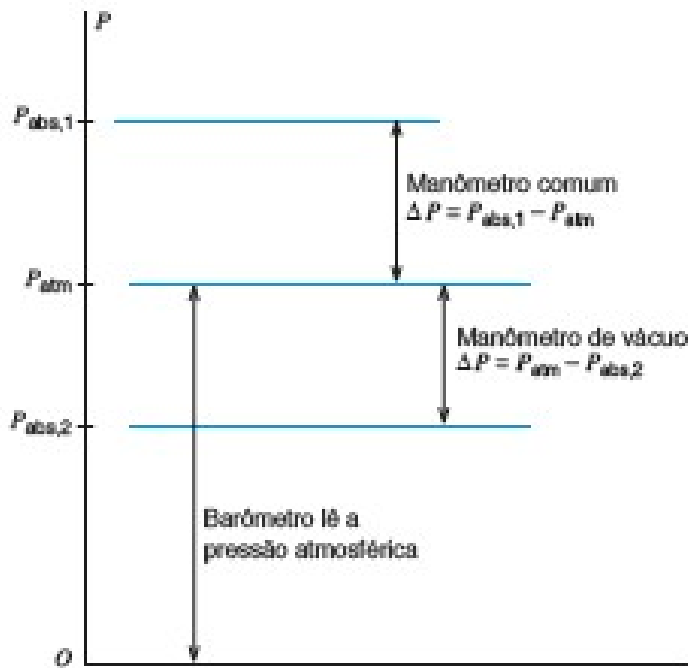


Figura 1.21  
Manômetro para calibração da pressão de pneus automotivos.

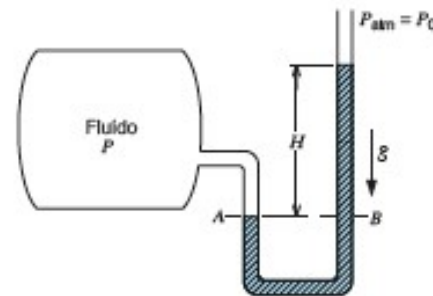
# 1.5 Dimensões e Unidades

## Pressão

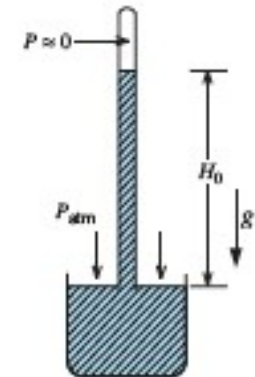
**ATENÇÃO:** Em muitas investigações termodinâmicas nos preocupamos com a **pressão absoluta**. A maioria dos manômetros de pressão e de vácuo, entretanto, mostram a diferença entre a pressão absoluta e a atmosférica. Diferença esta, chamada de **pressão manométrica** ou **efetiva**.



**Figura 1.12**  
Ilustração dos termos utilizados em medidas de pressão.



**Figura 1.13**  
Exemplo de medição de pressão com uma coluna de líquido.



**Figura 1.14**  
Barômetro.



## Exemplo

### Força exercida num sistema hidráulico

A Figura abaixo mostra um conjunto cilindro-pistão utilizado num sistema hidráulico. O diâmetro do cilindro ( $D$ ) é igual a 0,1m e a massa do conjunto pistão-haste é 25kg. O diâmetro da haste é 0,01m e a pressão atmosférica ( $p_0$ ) é 101kPa. Sabendo que o conjunto cilindro-pistão está em equilíbrio e que a pressão no fluido hidráulico é 250kPa, determine o módulo da força que é exercida, na direção vertical e no sentido descendente, sobre a haste.

**Solução:** Considerando que o conjunto cilindro – pistão está em equilíbrio estático e que as forças atuam na direção vertical,

$$\begin{aligned}\Sigma F_{\text{vert}} &= ma = 0 \\ &= p_{\text{cil}} \mathcal{A}_{\text{cil}} - p_0 (\mathcal{A}_{\text{cil}} - \mathcal{A}_{\text{haste}}) - F - m_p g\end{aligned}$$

Assim, a força aplicada na haste é

$$F = p_{\text{cil}} \mathcal{A}_{\text{cil}} - p_0 (\mathcal{A}_{\text{cil}} - \mathcal{A}_{\text{haste}}) - m_p g$$

As áreas são iguais a:

$$\mathcal{A}_{\text{cil}} = \pi r^2 = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi}{4} 0,1^2 = 7,854 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$\mathcal{A}_{\text{haste}} = \pi r^2 = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi}{4} 0,01^2 = 7,854 \times 10^{-5} \text{ m}^2$$

e o módulo da força que atua na haste é

$$\begin{aligned}F &= \left[ (250 \times 10^3) 7,854 \times 10^{-3} - (101 \times 10^3) (7,854 \times 10^{-3} - 7,854 \times 10^{-5}) \right] - 25 \times 9,81 \\ &= 1963,5 - 785,3 - 245,3 \\ &= 932,9 \text{ N}\end{aligned}$$

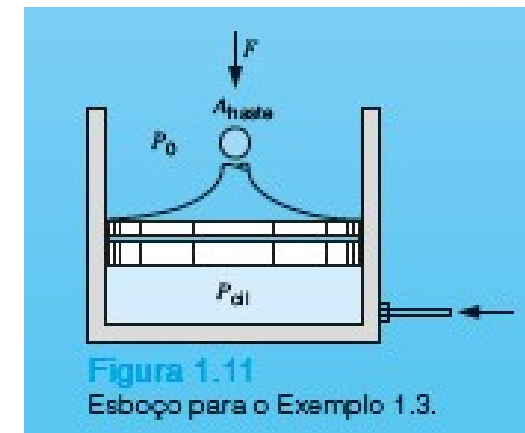


Figura 1.11  
Esboço para o Exemplo 1.3.



## Exemplo

### Pressão Manométrica e Absoluta

O tanque esférico mostrado na Figura abaixo apresenta diâmetro igual a 7,5m e é utilizado para armazenar fluidos. Determine a pressão no fundo do tanque considerando que: a) o tanque contém gasolina líquida a 25°C e a pressão na superfície livre do líquido é 101kPa; b) o fluido armazenado no tanque é o refrigerante R-134a e a pressão na superfície do líquido é 1MPa.

**Solução:** A Tab. A4 do Apêndice fornece os valores das massa específicas dos líquidos.

$$\rho_{\text{gasolina}} = 750 \text{ kg/m}^3 \quad \rho_{\text{R-134a}} = 1206 \text{ kg/m}^3$$

A diferença de pressão, devida a ação da gravidade, pode ser calculada com a Eq. 2.2. Assim,

$$\Delta p = \rho g L$$

A pressão no fundo do tanque é

$$p = p_{\text{topo}} + \Delta p$$

Quando o tanque contém gasolina,

$$p = 101 \times 10^3 + 750 \times 9.81 \times 7,5 = 156181 \text{ Pa} = 156,2 \text{ kPa}$$

Quando o tanque contém o fluido refrigerante R – 134a,

$$p = 1,0 \times 10^6 + 1206 \times 9.81 \times 7,5 = 1,0887 \times 10^6 \text{ Pa} = 1089 \text{ kPa}$$

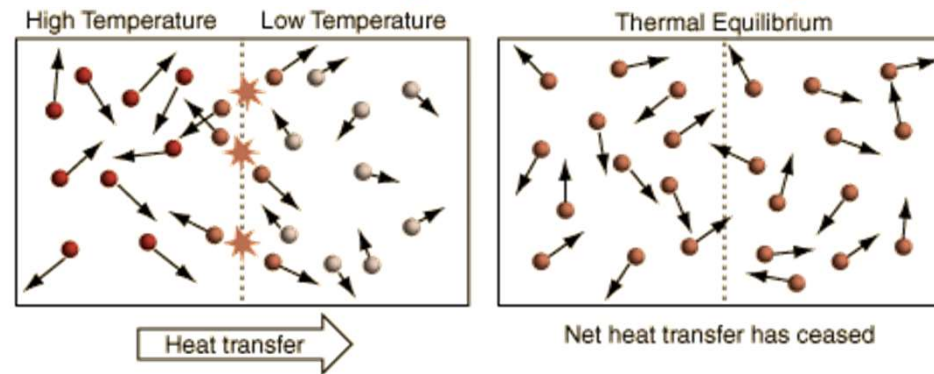


# 1.5 Dimensões e Unidades

## Temperatura

**Interpretação microscópica** ? medida da energia cinética média dos átomos ou moléculas que constituem o sistema.

(gases: energia cinética de translação; sólidos: energia cinética de vibração)



**Definição operacional** → a grandeza que se mede com um termômetro.



Figura 1.26 Termopares.

### Relação entre as Escalas de Temperatura

$$T (K) = t(^{\circ} C) + 273,15$$

↙ Escala Kelvin: ↘ Escala Celsius:

# Capítulo 1 – Introdução e Comentários Preliminares

## Vídeos

- ≡ Estabilidade de uma embarcação (V2\_7)
- ≡ escoamento bidimensional ao redor de corpos - Aerodinâmica e linhas de corrente (V4\_5)
- ≡ Dispersão atmosférica de poluentes e modelo em escala (V5\_3 e V7\_2)
- ≡ Força de um fluido exercida sobre uma parede (V5\_4)
- ≡ Túnel de vento – Aerodinâmica (V7\_5; V9\_8 e V9\_9)
- ≡ Regime Laminar x Turbulento (V8\_1 e V9\_3)
- ≡ Força e sustentação (V9\_5)
- ≡ escoamento sobre o leito de um rio – modelo em escala (V10\_4 e V10\_8)
- ≡ escoamento em canais abertos (V10\_2)





## Importante! Lista de Exercícios

Como reforço do aprendizado do conteúdo apresentado em sala de aula, são sugeridos os exercícios dispostos na lista abaixo. Bom estudo!

Exercícios Fox									
<b>Capítulo 1</b>									
	1.17	a	1,25						
Exercícios FOX 8ED	1.30	a	1.39						



## Capítulo 2 – Conceitos e Definições

- ≡ 2.1 O Fluido como um *Continuum*
- ≡ 2.2 Campo de Velocidade
- ≡ 2.3 Campo de Tensão
- ≡ 2.4 Viscosidade

## 2.1 O Fluido como um *Continuum*

O esboço na Fig. 2.1a mostra uma representação esquemática da distribuição molecular de um fluido no espaço. Uma região do espaço “preenchida” por um fluido estacionário parece um meio contínuo, mas se ampliarmos um pequeno cubo da região, poderemos ver que a maior parte do espaço é vazia, com moléculas espalhadas ao redor, movendo-se a alta velocidade (indicada pela temperatura do gás).

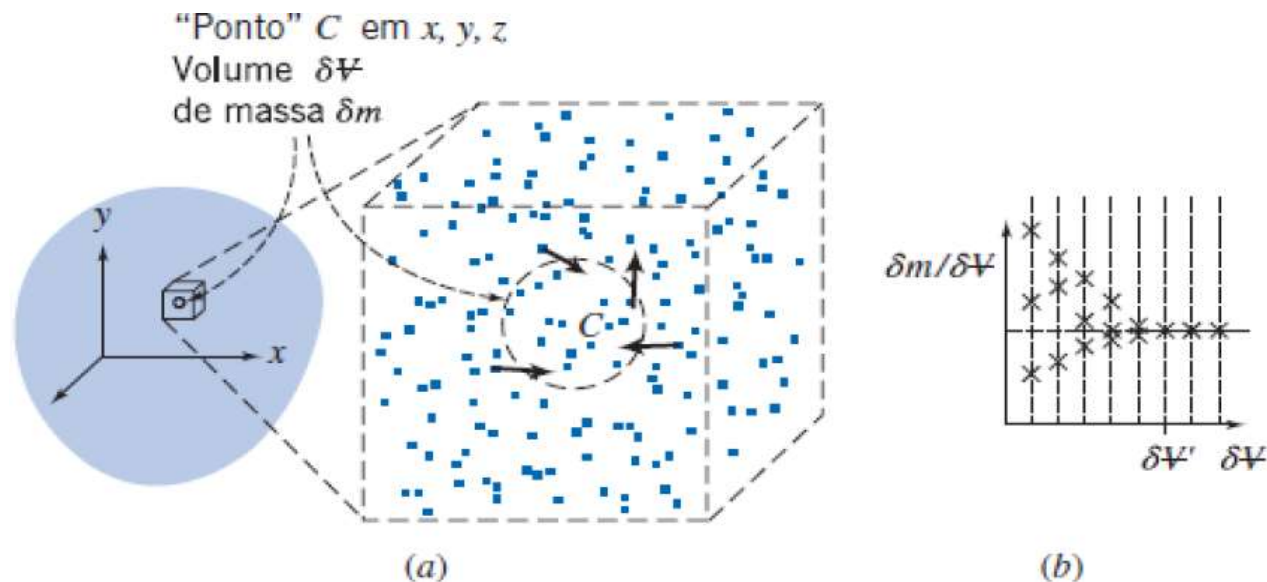


Fig. 2.1 Definição da massa específica em um ponto.

## 2.1 O Fluido como um *Continuum*

Então, qual é o mínimo volume, que um ponto  $C$  deve ter, de modo a podermos falar sobre **propriedades de fluido contínuo** tal como a **massa específica** em um ponto? Em outras palavras, sob que circunstâncias um fluido pode ser tratado como um meio contínuo, para o qual, por definição, as propriedades variam suavemente de ponto a ponto? **Essa é uma questão importante porque o conceito de um meio contínuo é a base da mecânica dos fluidos clássica.**

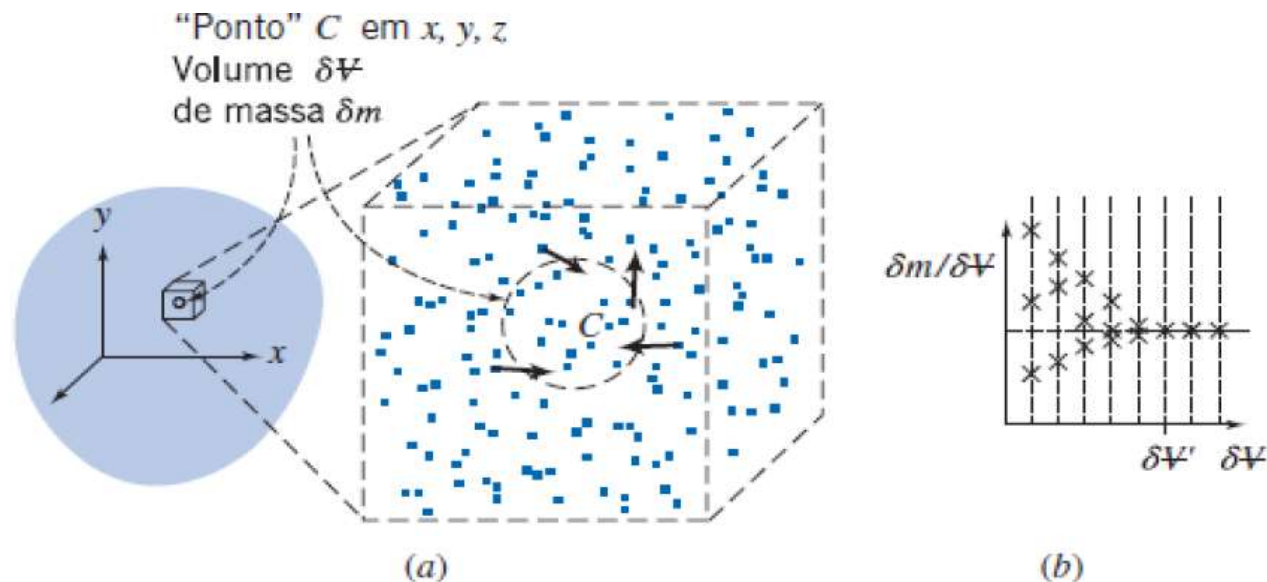


Fig. 2.1 Definição da massa específica em um ponto.

## 2.1 O Fluido como um *Continuum*

O conceito de um contínuo é a base da mecânica dos fluidos clássica. Cada propriedade do fluido é considerada como tendo um valor definido em cada ponto no espaço. Dessa forma, as propriedades dos fluidos, tais como massa específica, temperatura, velocidade e assim por diante, são consideradas funções contínuas da posição e do tempo.

Por exemplo, temos agora uma definição exequível da massa específica em um ponto,

$$\rho \equiv \lim_{\delta V \rightarrow \delta V'} \frac{\delta m}{\delta V} \qquad \rho = \rho(x, y, z, t)$$

Se a massa específica fosse medida simultaneamente em um número infinito de pontos no fluido, obteríamos uma expressão para a distribuição da massa específica como uma função das coordenadas espaciais e temporais,  $\rho = \rho(x, y, z, t)$ . (**representação do campo**)

## 2.2 Campo de Velocidade

Outras propriedades dos fluidos também podem ser descritas por campos.

Uma propriedade muito importante definida por um campo é o **campo de velocidade**, dado por

$$\vec{V} = \vec{V}(x, y, z, t)$$

A velocidade é uma quantidade vetorial, exigindo um módulo e uma direção para uma completa descrição. Por conseguinte, o campo de velocidade (Eq. 2.5) é um campo vetorial.

O vetor velocidade,  $V$ , também pode ser escrito em termos de suas três componentes escalares. Denotando as componentes nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$  por  $u$ ,  $v$  e  $w$ , então

$$\vec{V} = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k}$$

## 2.2 Campo de Velocidade

Se as propriedades em cada ponto em um campo de escoamento não variam com o tempo, o escoamento é dito em **regime permanente**. Matematicamente, a definição de escoamento em regime permanente é:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = 0$$

em que  $\eta$  representa qualquer propriedade do fluido. Por isso, para o regime permanente,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \text{ou} \quad \rho = \rho(x, y, z) \quad \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0 \quad \text{ou} \quad \vec{V} = \vec{V}(x, y, z)$$

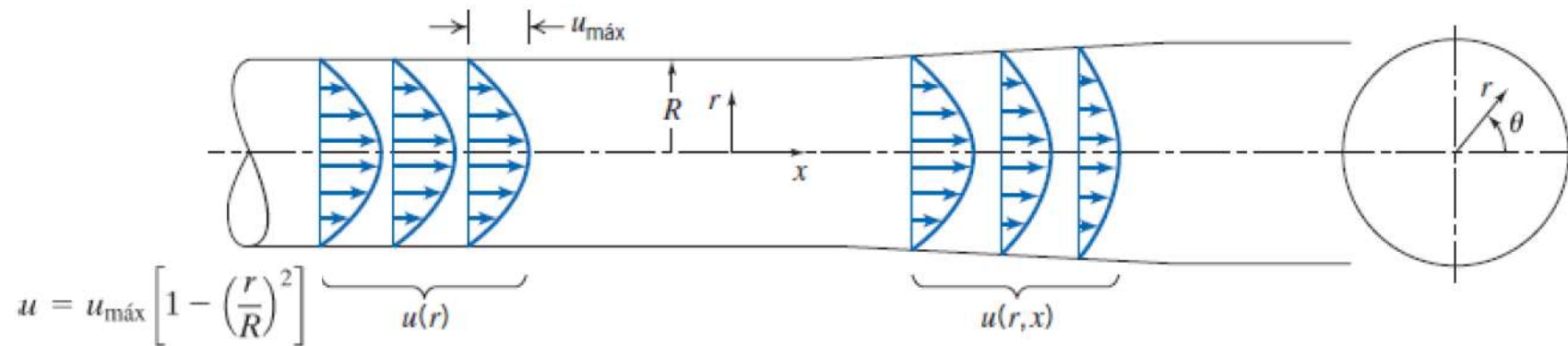


**Importante!**  
Em regime permanente, qualquer propriedade pode variar de ponto para ponto no campo, porém todas as propriedades permanecem constantes **com o tempo** em cada ponto

## 2.2 Campo de Velocidade

### 2.2.2. Escoamento uni, Bi ou Tridimensional

Um escoamento é classificado como uni, bi ou tridimensional de acordo com o número de coordenadas espaciais **necessárias para especificar seu campo de velocidade**. Embora a maioria dos campos de escoamento seja intrinsecamente tridimensional, a análise baseada em uma quantidade menor de dimensões é, com frequência, significativa.



O campo de velocidade  $u(r)$  é uma função de uma coordenada apenas e, portanto, o escoamento é unidimensional. Por outro lado, na seção divergente, a velocidade decresce no sentido positivo de  $x$  e o escoamento torna-se bidimensional:  $u = u(r, x)$ .

## 2.2 Campo de Velocidade

### 2.2.1. Linhas dos Campos de Escoamento

Os padrões de escoamento podem ser modelados de diversas maneiras; dentre elas há quatro tipos básicos de linha que são usados para ajudar a visualizar os escoamentos:

1. Linha de Corrente – é uma linha tangente em todos os pontos ao vetor velocidade num dado instante.
2. Linha de Trajetória – é o caminho real percorrido por uma determinada partícula de fluido.
3. Linha de Emissão – é a linha formada por todas as partículas que passaram anteriormente por um ponto prescrito.
4. Linha de Filete – é um conjunto de partículas de fluido que formam uma linha em um dado instante.



## 2.2 Campo de Velocidade

### 2.2.1. Linhas dos Campos de Escoamento



#### Importante!

Para o escoamento em regime permanente, as linhas de emissão, linhas de corrente e trajetórias são idênticas.



As coisas são completamente diferentes para o escoamento em regime transiente. Nesse caso, as linhas de emissão, linhas de corrente e trajetórias terão formas diferentes.

## 2.2 Campo de Velocidade

### 2.2.1. Linhas dos Campos de Escoamento

Podemos usar o **campo de velocidade** para deduzir as formas das **linhas de emissão, trajetórias e linhas de corrente**.

Iniciemos com as linhas de corrente: como as linhas de corrente são paralelas ao vetor velocidade, podemos escrever (para 2D)

$$\left. \frac{dy}{dx} \right)_{\text{linha de corrente}} = \frac{v(x, y)}{u(x, y)}$$

Para trajetórias (considerando novamente 2D), fazemos  $x = x_p(t)$  e  $y = y_p(t)$  em que  $x_p(t)$  e  $y_p(t)$  são as coordenadas instantâneas de uma partícula específica. Temos, portanto

$$\left. \frac{dx}{dt} \right)_{\text{partícula}} = u(x, y, t) \quad \left. \frac{dy}{dt} \right)_{\text{partícula}} = v(x, y, t)$$



## Exemplo

### Linhas de Corrente e Trajetórias no escoamento bidimensional

Um campo de velocidade é dado por  $V = Axi - Ayj$ ; as unidades de velocidade são m/s; x e y são dados em metros;  $A = 0,3s^{-1}$ .

- Obtenha uma equação para as linhas de corrente no plano xy
- Trace a linha de corrente que passa pelo ponto  $(x_0, y_0) = (2, 8)$
- Determine a velocidade de uma partícula no ponto  $(2, 8)$
- Se a partícula passando pelo ponto  $(x_0, y_0)$  no instante  $t = 0$  for marcada, determine a sua localização no instante  $t = 6s$
- Qual a velocidade dessa partícula em  $t = 6s$  ?
- Mostre que a equação da trajetória da partícula é a mesma equação da linha de corrente



## Exemplo

### Linhas de Corrente e Trajetórias no escoamento bidimensional

#### Solução:

- (a) Linhas de corrente são aquelas desenhadas no campo de escoamento de modo que, em um dado instante, são tangentes à direção do escoamento em cada ponto. Conseqüentemente,

$$\left. \frac{dy}{dx} \right)_{\text{linha de corrente}} = \frac{v}{u} = \frac{-Ay}{Ax} = \frac{-y}{x}$$

Separando as variáveis e integrando, obteremos

$$\int \frac{dy}{y} = - \int \frac{dx}{x}$$

ou

$$\ln y = -\ln x + c_1$$

Isso pode ser escrito como  $xy = c$

- (b) Para a linha de corrente que passa pelo ponto  $(x_0, y_0) = (2, 8)$ , a constante,  $c$ , tem um valor de 16 e a equação da linha de corrente que passa pelo ponto  $(2, 8)$  é então

$$xy = x_0 y_0 = 16 \text{ m}^2$$



## Exemplo

### Linhas de Corrente e Trajetórias no escoamento bidimensional

(c) O campo de velocidade é  $\vec{V} = Ax\hat{i} - Ay\hat{j}$ . No ponto (2, 8) a velocidade é

$$\vec{V} = A(x\hat{i} - y\hat{j}) = 0,3\text{s}^{-1}(2\hat{i} - 8\hat{j})\text{m} = 0,6\hat{i} - 2,4\hat{j}\text{m/s} \leftarrow$$

(d) Uma partícula movendo-se no campo de escoamento terá a velocidade dada por

$$\vec{V} = Ax\hat{i} - Ay\hat{j}$$

Então

$$u_p = \frac{dx}{dt} = Ax \quad \text{e} \quad v_p = \frac{dy}{dt} = -Ay$$

Separando as variáveis e integrando (em cada equação) resulta

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{x} = \int_0^t A dt \quad \text{e} \quad \int_{y_0}^y \frac{dy}{y} = \int_0^t -A dt$$



## Exemplo

### Linhas de Corrente e Trajetórias no escoamento bidimensional

Então

$$\ln \frac{x}{x_0} = At \quad \text{e} \quad \ln \frac{y}{y_0} = -At$$

ou

$$x = x_0 e^{At} \quad \text{e} \quad y = y_0 e^{-At}$$

Em  $t = 6$ ,

$$x = 2 \text{ m } e^{(0,3)6} = 12,1 \text{ m} \quad \text{e} \quad y = 8 \text{ m } e^{-(0,3)6} = 1,32 \text{ m}$$

Para  $t = 6$  s, a partícula estará em  $(12,1; 1,32)$  m ←



## Exemplo

### Linhas de Corrente e Trajetórias no escoamento bidimensional

(e) No ponto (12,1; 1,32) m,

$$\begin{aligned}\vec{V} &= A(x\hat{i} - y\hat{j}) = 0,3 \text{ s}^{-1}(12,1\hat{i} - 1,32\hat{j})\text{m} \\ &= 3,63\hat{i} - 0,396\hat{j} \text{ m/s} \leftarrow\end{aligned}$$

(f) Para determinar a equação da trajetória, empregamos as equações paramétricas

$$x = x_0 e^{At} \quad \text{e} \quad y = y_0 e^{-At}$$

e eliminamos  $t$ . Resolvendo para  $e^{At}$  nas duas equações

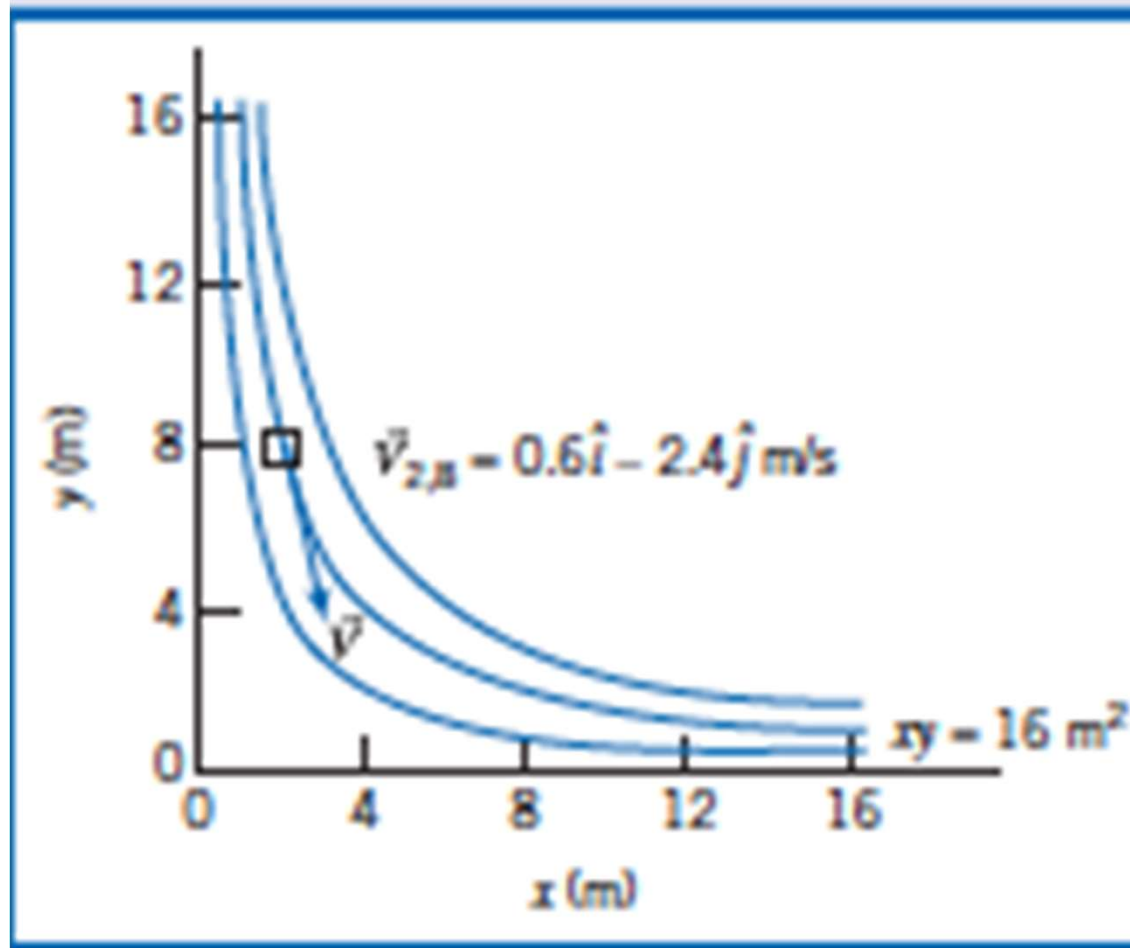
$$e^{At} = \frac{y_0}{y} = \frac{x}{x_0}$$

Portanto,  $xy = x_0 y_0 = 16 \text{ m}^2 \leftarrow$



## Exemplo

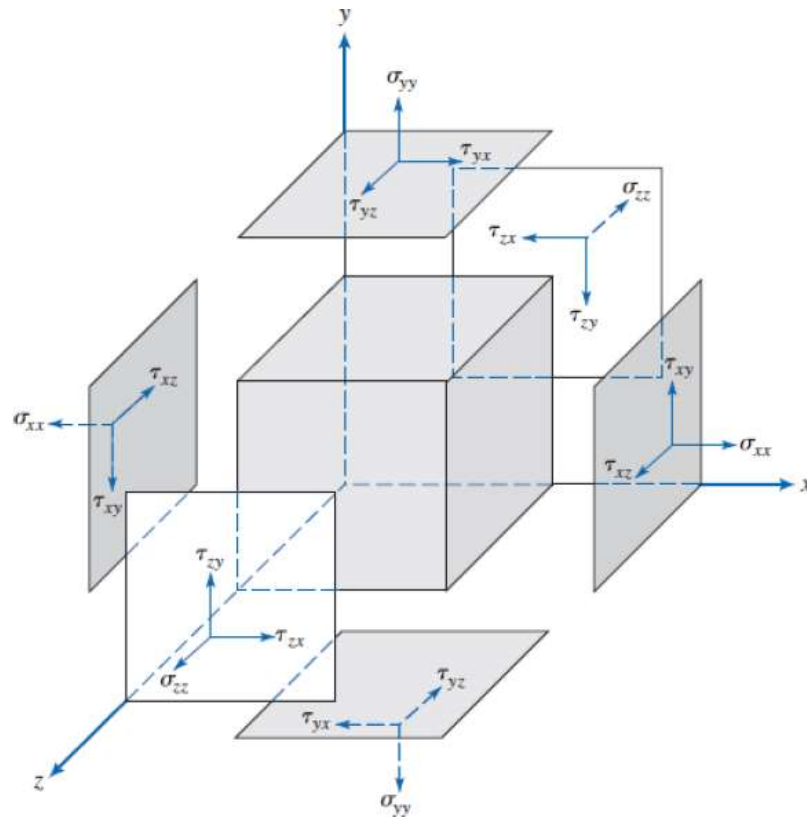
### Linhas de Corrente e Trajetórias no escoamento bidimensional





## 2.3 Campo de Tensão

Cada partícula fluida pode sofrer a ação de **forças de superfície** (pressão, atrito) que são geradas pelo contato com outras partículas ou com superfícies sólidas; e **forças de campo** (tais como forças de gravidade e eletromagnética) que agem através das partículas.



A força,  $\delta F$ , agindo sobre  $\delta A$ , pode ser decomposta em duas componentes, uma normal  $\sigma_n$  e a outra tangente à área  $\tau_n$ .

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

## 2.4 Viscosidade

... e qual a origem das tensões?

Para um sólido, as tensões são desenvolvidas quando um material é deformado ou cisalhado elasticamente; para um fluido, as tensões de cisalhamento aparecem devido ao escoamento viscoso. Desse modo, dizemos que os **sólidos são elásticos** e os **fluidos são viscosos**.

Para um fluido em repouso, não existirá tensão de cisalhamento.

O exame da relação entre a tensão de cisalhamento aplicada e o escoamento (especialmente a taxa de deformação) do fluido pode ser usado para definir categorias de classificação de cada fluido.

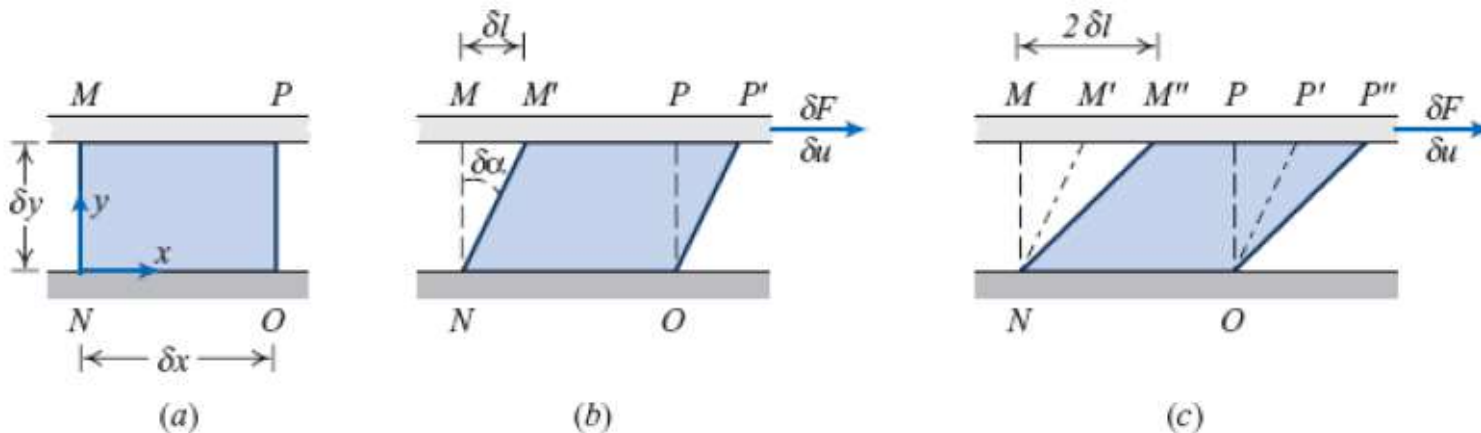
## 2.4 Viscosidade

Consideremos agora que uma força constante para a direita  $\delta F_x$  seja aplicada à placa de modo que ela é arrastada através do fluido a velocidade constante  $\delta u$ . A ação de cisalhamento relativo da placa infinita produz uma tensão de cisalhamento,  $\tau_{yx}$ , aplicada ao elemento fluido que é dada por

$$\tau_{yx} = \lim_{\delta A_y \rightarrow 0} \frac{\delta F_x}{\delta A_y} = \frac{dF_x}{dA_y}$$

Durante o intervalo de tempo  $\delta t$  (Fig. 2.9b), a deformação do fluido é dada por

$$\text{taxa de deformação} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta \alpha}{\delta t} = \frac{d\alpha}{dt}$$



## 2.4 Viscosidade

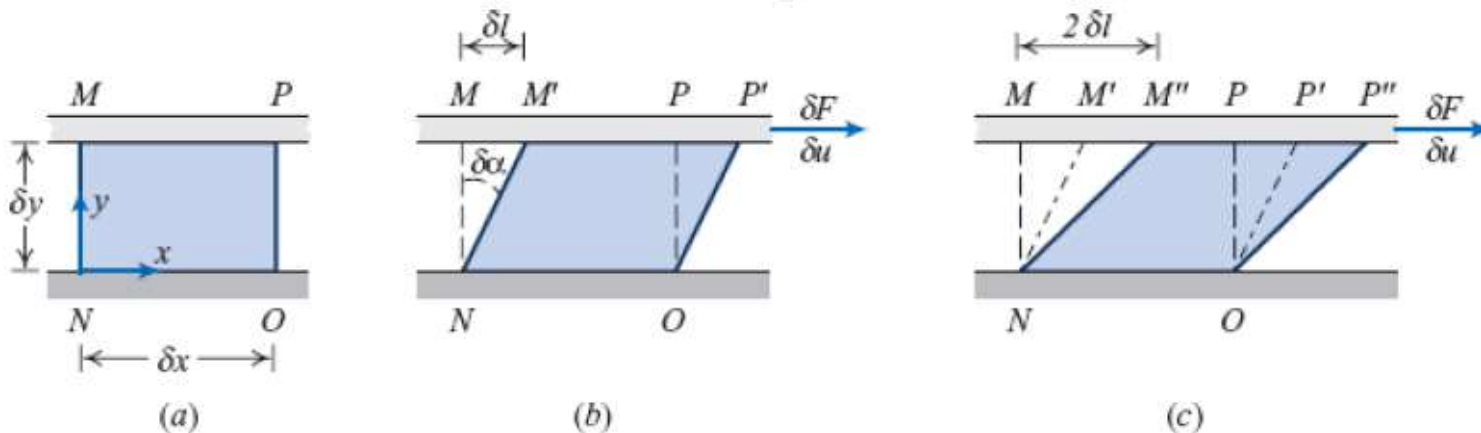
Desejamos expressar  $da/dt$  em função de quantidades prontamente mensuráveis. Isso pode ser feito facilmente. A distância  $\delta l$ , entre os pontos M e M', é dada por  $\delta l = \delta u \delta t$

Alternativamente, para pequenos ângulos,  $\delta l = \delta y \delta \alpha$

Igualando essas duas expressões para  $\delta l$ , obteremos  $\frac{\delta \alpha}{\delta t} = \frac{\delta u}{\delta y}$

Tomando os limites de ambos os lados da igualdade, obteremos:

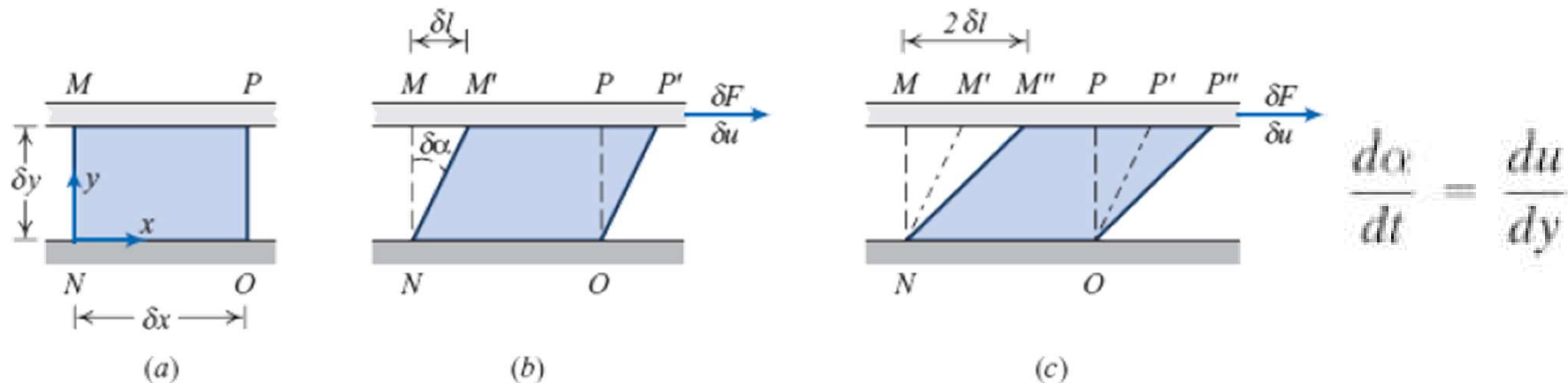
$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{du}{dy}$$



## 2.4 Viscosidade

Dessa forma, o elemento fluido da Fig. 2.9, quando submetido à tensão de cisalhamento,  $\tau_{yx}$ , experimenta uma taxa de deformação (taxa de cisalhamento) dada por  $du/dy$ . Já estabelecemos que qualquer fluido sob a ação de uma tensão de cisalhamento escoará (ele terá uma taxa de cisalhamento).

Os fluidos para os quais a tensão de cisalhamento é diretamente proporcional à taxa de deformação são **fluidos newtonianos**. A expressão não-newtoniano é empregada para classificar todos os fluidos em que a tensão cisalhante não é diretamente proporcional à taxa de deformação.



## 2.4 Viscosidade

### 2.2.1. Fluidos Newtonianos

Os fluidos mais comuns são newtonianos em condições normais. Se o fluido da Fig. 2.9 for newtoniano, então.

$$\tau_{yx} \propto \frac{du}{dy}$$

A constante de proporcionalidade na Eq. é a viscosidade absoluta (ou dinâmica),  $\mu$ .

Assim, pode se correlacionar a tensão de cisalhamento sofrida pelo fluido com a taxa de deformação:

Viscosidade dinâmica

$$\tau \propto \frac{du}{dy} \rightarrow \text{Esta proporcionalidade é transformada em igualdade através da adoção de uma constante de proporcionalidade} \rightarrow \tau = \mu \frac{du}{dy}$$

## 2.4 Viscosidade

### 2.2.1. Fluidos Newtonianos

Na mecânica dos fluidos, a razão entre a **viscosidade absoluta**,  $\mu$ , e a massa específica,  $\rho$ , surge com frequência. Esta razão toma o nome de **viscosidade cinemática** e é representada pelo símbolo  $\nu$ .



A TENSÃO DE CISLHAMENTO RESULTANTE PARA UMA DETERMINADA TAXA DE DEFORMAÇÃO SERÁ TANTO MAIOR QUANTO MAIOR A VISCOSIDADE DESTES FLUIDOS!

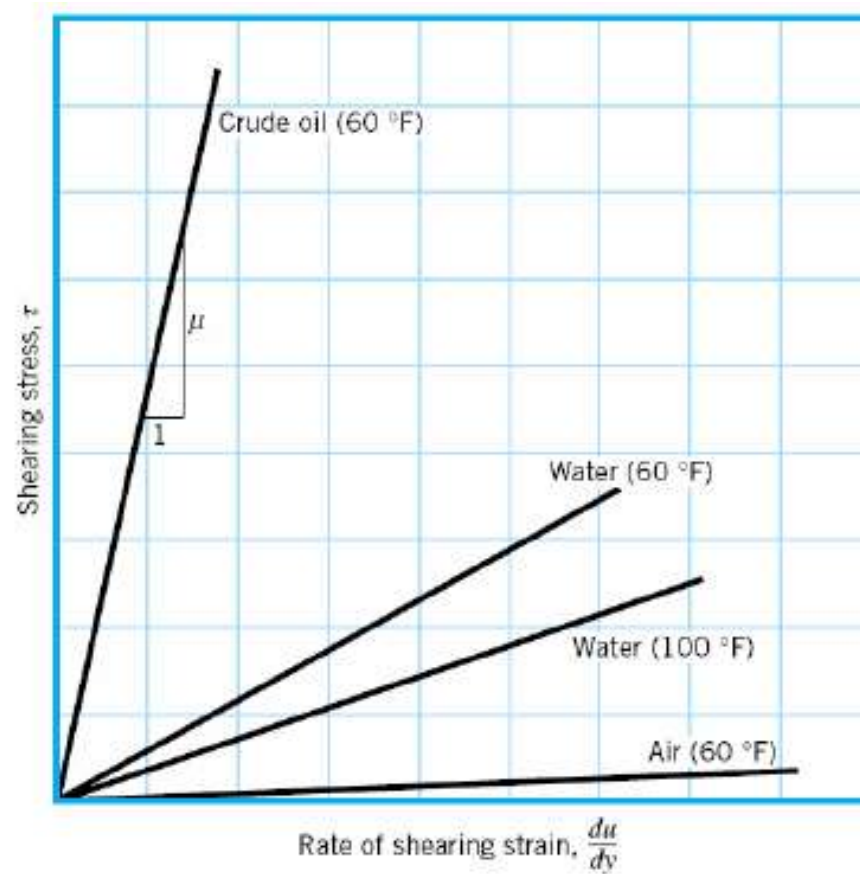
FLUIDOS ONDE A RELAÇÃO ENTRE TENSÃO CISLHANTE E TAXA DE DEFORMAÇÃO SEGUEM A PROPORCIONALIDADE ACIMA (LINEAR), SÃO CHAMADOS DE FLUIDOS NEWTONIANOS !! (água, óleo, ar, glicerina, azeite, etc...)

A GRANDE MAIORIA DOS FLUIDOS QUE CONHECEMOS SÃO FLUIDOS NEWTONIANOS.

A CIÊNCIA QUE ESTUDA OS FLUIDOS NÃO NEWTONIANOS É CHAMADA DE REOLOGIA.

## 2.4 Viscosidade

### 2.2.1. Fluidos Newtonianos



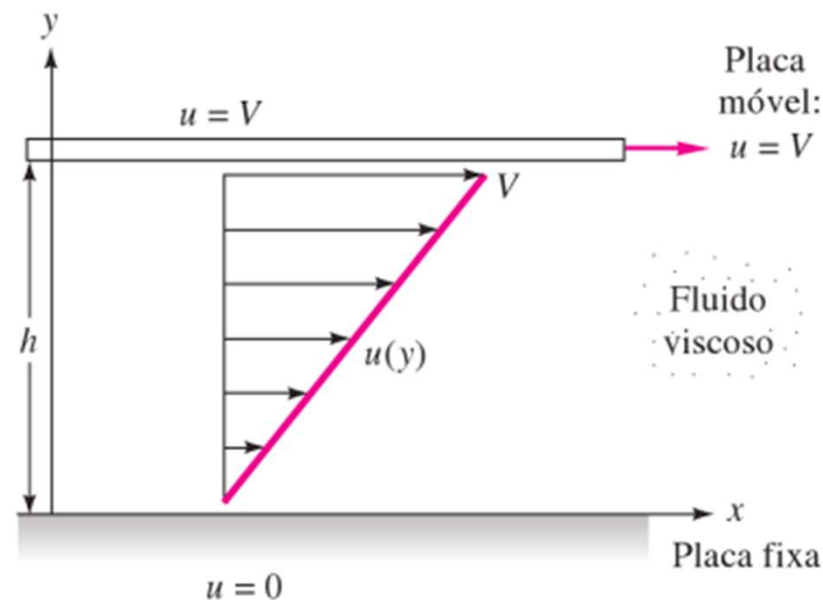




## Exemplo Placas paralelas

**Exemplo 18** – Suponha que um fluido entre duas placas esteja sendo cisalhado, como na figura 15. O óleo entre elas é um óleo muito viscoso, SAE 30 (classificação da Sociedade dos Engenheiros Automotivos dos Estados Unidos), a 20°C. Dada a viscosidade do óleo,  $\mu_{\text{óleo}} = 0,29 \text{ kg/m}\cdot\text{s}$ , calcule a tensão de cisalhamento se  $V = 3 \text{ m/s}$  e  $h = 2 \text{ cm}$ .

$$\begin{aligned}\tau &= \mu \frac{du}{dy} \cong \mu \frac{V}{h} = \frac{0,29 \frac{\text{kg}}{\text{m}\cdot\text{s}} 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0,02 \text{ m}} \\ &= 43 \frac{\text{kg}}{\text{m}\cdot\text{s}^2} = 43 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 43 \text{ Pa}\end{aligned}$$





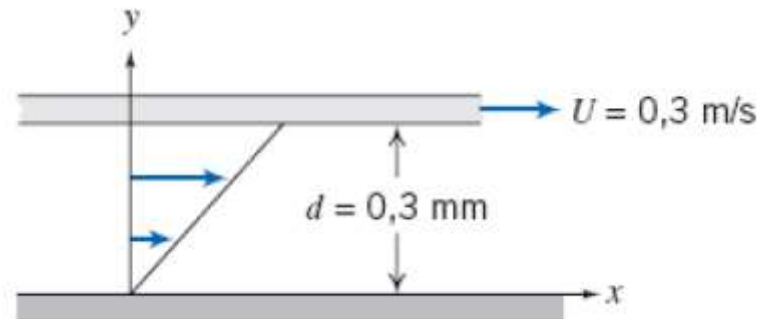
## Exemplo

### Viscosidade e Tensão de Cisalhamento em um Fluido Newtoniano

Uma placa infinita move-se sobre uma segunda placa, havendo entre elas uma camada de líquido, como mostrado. Para uma pequena altura da camada,  $d$ , podemos supor uma distribuição linear de velocidade no líquido. A viscosidade do líquido é  $0,0065 \text{ g/cm} \cdot \text{s}$  e sua densidade relativa é  $0,88$ .

Determine:

- A viscosidade absoluta do líquido, em  $\text{N} \cdot \text{s}/\text{m}^2$ .
- A viscosidade cinemática do líquido, em  $\text{m}^2/\text{s}$ .
- A tensão de cisalhamento na placa superior, em  $\text{N}/\text{m}^2$ .
- A tensão de cisalhamento na placa inferior, em Pa.
- O sentido de cada tensão cisalhante calculada nas partes (c) e (d).





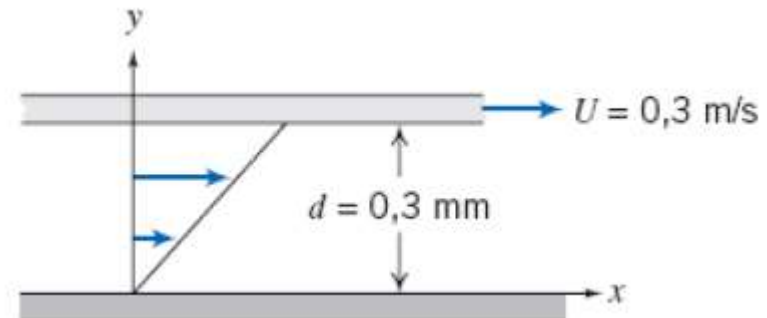
# Exemplo

## Viscosidade e Tensão de Cisalhamento em um Fluido Newtoniano

**Solução:**

**Equação básica:**  $\tau_{yx} = \mu \frac{du}{dy}$  Definição:  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$

**Considerações:** (1) Distribuição linear de velocidade (dado)  
(2) Escoamento em regime permanente  
(3)  $\mu = \text{constante}$



(a)  $\mu = 0,0065 \frac{\text{g}}{\text{cm} \cdot \text{s}} \times \frac{\text{kg}}{1000 \text{ g}} \times \frac{9,81 \text{ m}}{\text{s}^2} \times \frac{100 \text{ cm}}{\text{m}} \times \frac{\text{s}^2}{9,81 \text{ m}}$   
 $\mu = 6,5 \times 10^{-4} \text{ N} \cdot \text{s} / \text{m}^2 \leftarrow$

(b)  $\nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{\mu}{\text{SG} \rho_{\text{H}_2\text{O}}}$   
 $= 6,5 \times 10^{-4} \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}^2} \times \frac{\text{m}^3}{(0,88)1000 \text{ kg}}$   
 $= 6,5 \times 10^{-4} \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} \times \frac{\text{s}}{\text{m}^2} \times \frac{\text{m}^3}{(0,88)1000 \text{ kg}}$   
 $\nu = 7,39 \times 10^{-7} \text{ m}^2 / \text{s} \leftarrow \nu$

(c)  $\tau_{\text{superior}} = \tau_{yx, \text{superior}} = \mu \left( \frac{du}{dy} \right)_{y=d}$



## Exemplo

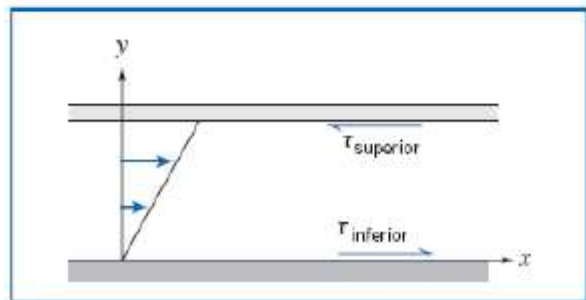
### Viscosidade e Tensão de Cisalhamento em um Fluido Newtoniano

Como  $u$  varia linearmente com  $y$ ,

$$\begin{aligned}\frac{du}{dy} &= \frac{\Delta u}{\Delta y} = \frac{U - 0}{d - 0} = \frac{U}{d} \\ &= 0,3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \times \frac{1}{0,3 \text{ mm}} \times 1000 \frac{\text{mm}}{\text{m}} = 1000 \text{ s}^{-1}\end{aligned}$$
$$\tau_{\text{superior}} = \mu \frac{U}{d} = 6,5 \times 10^{-4} \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}^2} \times \frac{1000}{\text{s}} = 0,65 \text{ N/m}^2 \leftarrow \tau_{\text{superior}}$$

(d)  $\tau_{\text{inferior}} = \mu \frac{U}{d} = 0,65 \text{ N/m}^2 \times \frac{\text{Pa} \cdot \text{m}^2}{\text{N}} = 0,65 \text{ Pa} \leftarrow \tau_{\text{inferior}}$

(e) Sentido das tensões de cisalhamento nas placas superior e inferior.



{ A placa superior é uma superfície de  $y$  negativo, de modo que a tensão positiva  $\tau_{yx}$  age no sentido de  $x$  negativo. }

{ A placa inferior é uma superfície de  $y$  positivo, de modo que a tensão positiva  $\tau_{yx}$  age no sentido de  $x$  positivo. }

## 2.4 Viscosidade

### 2.2.2. Fluidos Não-Newtonianos

Fluidos para os quais a **tensão de cisalhamento não é diretamente proporcional à taxa de deformação** são não newtonianos.

Inúmeras equações empíricas têm sido propostas para modelar as relações observadas entre  $\tau_{yx}$  e  $du/dy$  para fluidos com comportamento independente do tempo. Para muitas aplicações da engenharia, essas relações podem ser adequadamente representadas pelo modelo exponencial que, para o escoamento unidimensional, torna-se

$$\tau_{yx} = k \left( \frac{du}{dy} \right)^n$$

em que o expoente,  $n$ , é chamado de índice de comportamento do escoamento e o coeficiente,  $k$ , o índice de consistência. Esta equação reduz-se à lei da viscosidade de Newton para  $n = 1$  com  $k = \mu$ .

## 2.4 Viscosidade

### 2.2.2. Fluidos Não-Newtonianos

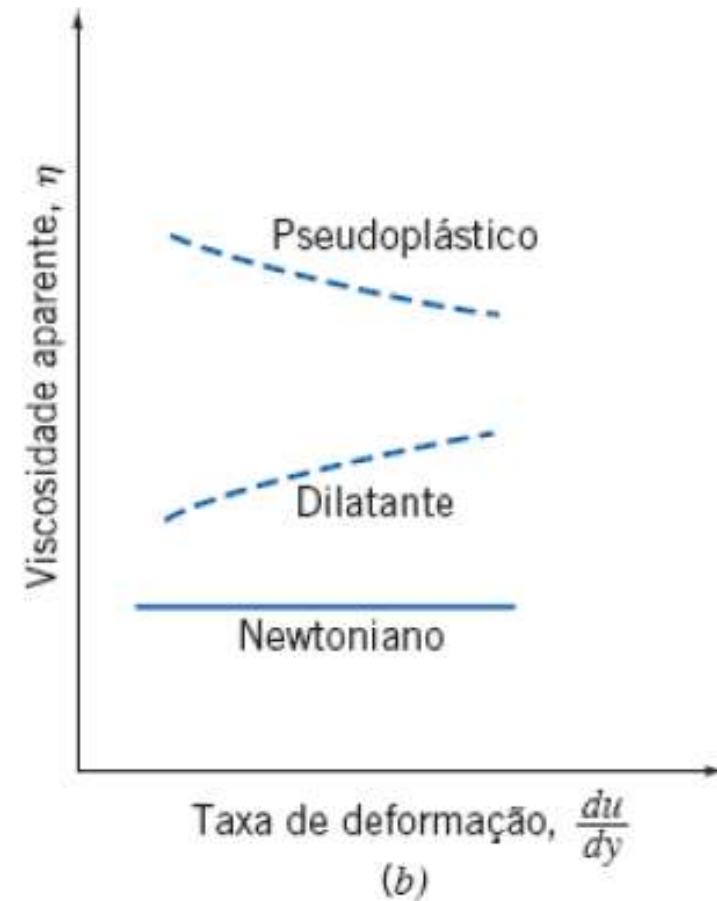
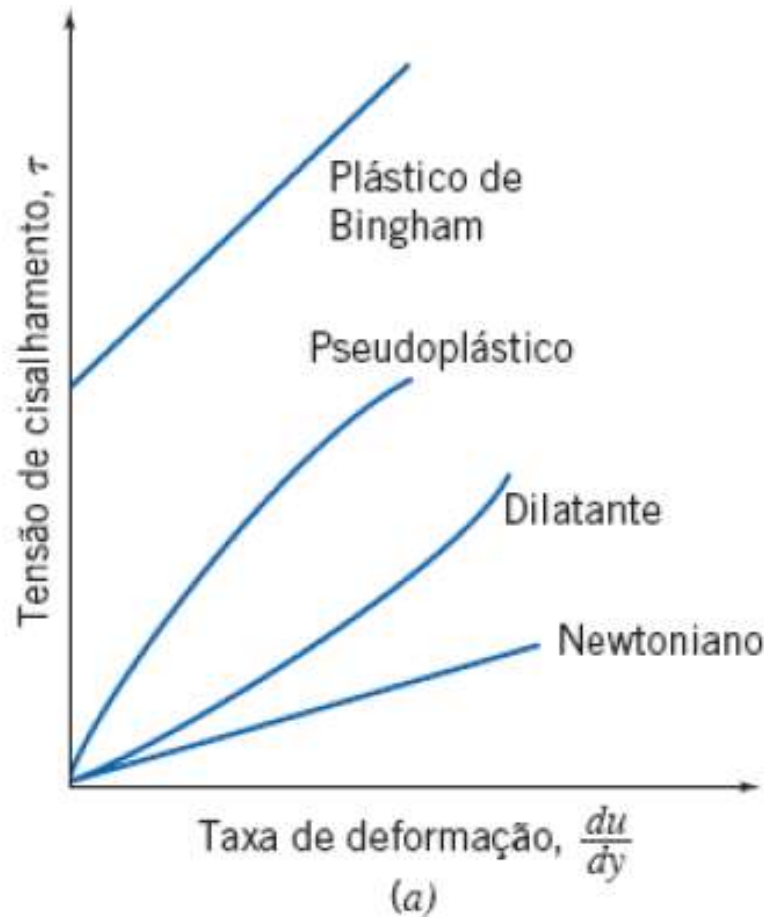
Para assegurar que  $\tau_{yx}$  tenha o mesmo sinal de  $du/dy$ , a Eq. é reescrita na forma

$$\tau_{yx} = k \left| \frac{du}{dy} \right|^{n-1} \frac{du}{dy} = \eta \frac{du}{dy}$$

O termo  $\eta = k|du/dy|^{n-1}$  é referenciado como a **viscosidade aparente** do fluido. A ideia por trás da Eq. 2.17 é usar uma viscosidade  $\eta$  em uma equação cujo formato seja idêntico ao da Eq. 2.15, em que a viscosidade newtoniana  $\mu$  é aplicada.

## 2.4 Viscosidade

### 2.2.2. Fluidos Não-Newtonianos



## 2.4 Viscosidade

### 2.2.2. Fluidos Não-Newtonianos

Os fluidos em que a viscosidade aparente decresce conforme a taxa de deformação cresce ( $\eta < 1$ ) são chamados de fluidos **pseudoplásticos** (tornam-se mais finos quando sujeitos a tensões cisalhantes). A maioria dos fluidos não newtonianos enquadra-se nesse grupo; exemplos incluem as soluções de polímeros, as suspensões coloidais e a polpa de papel em água.

Se a viscosidade aparente cresce conforme a taxa de deformação cresce ( $\eta > 1$ ), o fluido é chamado **dilatante**. Você pode ter uma ideia disso na praia — se você andar lentamente (e, portanto, gerando uma baixa taxa de cisalhamento) sobre uma areia muito úmida, você afunda nela, mas se você corre sobre ela (gerando uma alta taxa de cisalhamento), a areia é firme.



## 2.4 Viscosidade

### 2.2.2. Fluidos Não-Newtonianos

Um “fluido” que se comporta como um sólido até que uma tensão limítrofe,  $\tau_y$ , seja excedida e, subsequentemente, exibe uma relação linear entre tensão de cisalhamento e taxa de deformação é denominado **plástico de Bingham** ou plástico ideal. Suspensões de argila, lama de perfuração e pasta dental são exemplos de substâncias que exibem esse comportamento.

O estudo dos fluidos não newtonianos é ainda mais complicado pelo fato de que a **viscosidade aparente pode ser dependente do tempo**. Fluidos **tixotrópicos** mostram um **decréscimo em  $\eta$**  com o tempo sob uma tensão cisalhante constante; muitas tintas são tixotrópicas. Fluidos **reopéticos** mostram um **aumento em  $\eta$**  com o tempo.



## Importante! Lista de Exercícios

Como reforço do aprendizado do conteúdo apresentado em sala de aula, são sugeridos os exercícios dispostos na lista abaixo. Bom estudo!

Exercícios Fox									
<b>Capítulo 2</b>									
Exercícios FOX 4ED	2.41	2.42	2.48	2.49	2.51	2.60	2.64	2.65	2.66
Exercícios FOX 6ED									
Exercícios FOX 8ED	2.40	2.41	2.45	2.46		2.58	2.64	2.66	2.67

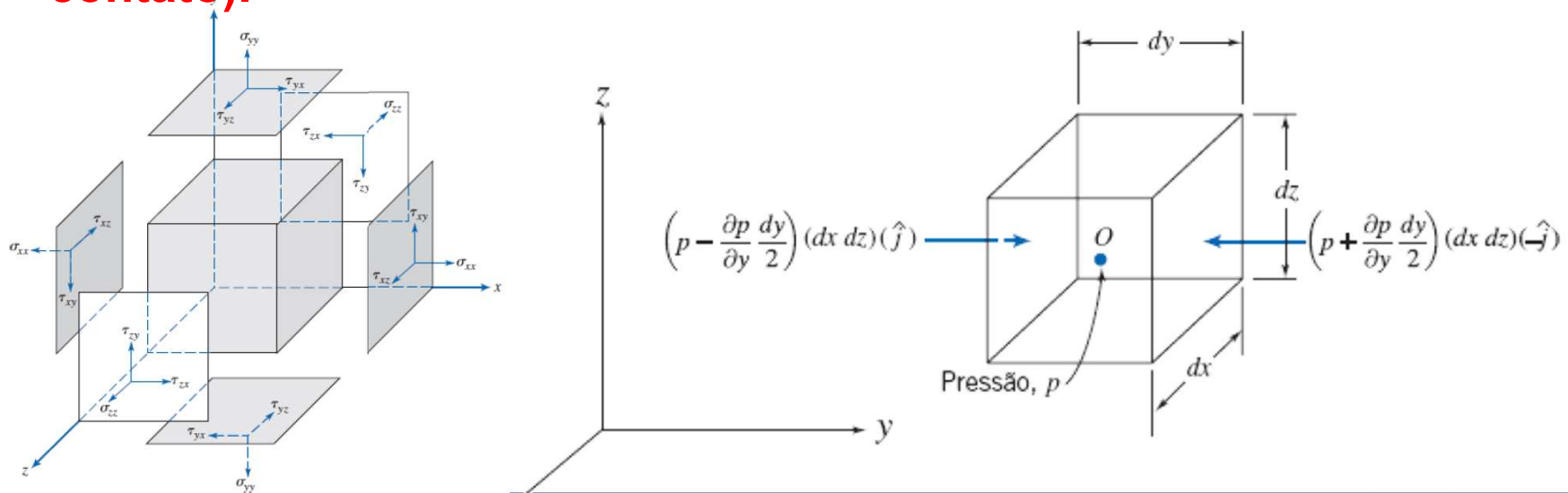
## Capítulo 3 – Estática dos Fluidos

- ≡ 3.1 A Equação Básica da Estática dos Fluidos
- ≡ 3.2 Variação de Pressão em um Fluido Estático
- ≡ 3.3 A Atmosfera Padrão
- ≡ 3.4 Forças Hidrostáticas sobre Superfícies Submersas
- ≡ 3.5 Empuxo e Estabilidade

### 3.1 A Equação Básica da Estática dos Fluidos

A equação para calcular o campo de pressão em um fluido estático é obtida através da segunda lei de Newton aplicada a um elemento de fluido diferencial de massa  $dm$  ( $\rho dV$ ), com lados  $dx$ ,  $dy$  e  $dz$ , conforme mostrado na Fig. 3.1. O elemento fluido está em repouso em relação ao sistema inercial de coordenadas retangulares mostrado.

De nossas discussões anteriores, vamos lembrar os dois tipos genéricos de forças que podem ser aplicados a um fluido: **forças de campo (ou de ação a distância) e forças de superfície (ou de contato).**



## 3.1 A Equação Básica da Estática dos Fluidos

A única **força de campo** que deve ser considerada na maioria dos problemas de engenharia é aquela decorrente da gravidade. Em algumas situações, forças causadas por campos elétricos ou magnéticos podem estar presentes; elas não serão consideradas neste texto. Para um elemento de fluido diferencial, a força de campo é

$$d\vec{F}_B = \vec{g}dm = \vec{g}\rho dV$$

em que  $\vec{g}$  é o vetor gravidade local,  $\rho$  é a massa específica e  $dV$  é o volume do elemento. Em coordenadas cartesianas, de modo que

$$d\vec{F}_B = \rho\vec{g} dx dy dz$$

## 3.1 A Equação Básica da Estática dos Fluidos

Em um fluido estático, nenhuma tensão de cisalhamento pode estar presente. Então, a única **força de superfície** é a força de pressão. A pressão é um campo escalar,  $p = p(x, y, z)$ ; de modo geral, esperamos que a pressão varie com a posição dentro do fluido. A força líquida de pressão que resulta dessa variação pode ser avaliada pela soma de todas as forças que atuam nas seis faces do elemento fluido.

$$\begin{aligned} d\vec{F}_s = & \left( p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) (dy \, dz)(\hat{i}) + \left( p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) (dy \, dz)(-\hat{i}) \\ & + \left( p - \frac{\partial p}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) (dx \, dz)(\hat{j}) + \left( p + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) (dx \, dz)(-\hat{j}) \\ & + \left( p - \frac{\partial p}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) (dx \, dy)(\hat{k}) + \left( p + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) (dx \, dy)(-\hat{k}) \end{aligned}$$

Agrupando e cancelando os termos, obtemos:

$$d\vec{F}_s = - \left( \frac{\partial p}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \hat{k} \right) dx \, dy \, dz \qquad \text{grad } p \equiv \nabla p \equiv \left( \hat{i} \frac{\partial p}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial p}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial p}{\partial z} \right)$$

### 3.1 A Equação Básica da Estática dos Fluidos

Combinamos as formulações desenvolvidas para as forças de superfície e de campo de modo a obter a força total atuando sobre um elemento fluido. Assim:

$$d\vec{F} = d\vec{F}_S + d\vec{F}_B = (-\nabla p + \rho\vec{g}) dx dy dz = (-\nabla p + \rho\vec{g}) d\mathcal{V}$$

ou, por unidade de volume,  $\frac{d\vec{F}}{d\mathcal{V}} = -\nabla p + \rho\vec{g}$

Para uma partícula fluida estática:  $\frac{d\vec{F}}{d\mathcal{V}} = \rho\vec{a} = 0$

O significado físico de cada termo é:

$$\left. \begin{array}{c} -\nabla p \\ \text{força de pressão líquida} \\ \text{por unidade de volume} \\ \text{em um ponto} \end{array} \right\} + \left. \begin{array}{c} \rho\vec{g} \\ \text{força de campo por} \\ \text{unidade de volume} \\ \text{em um ponto} \end{array} \right\} = 0$$

## 3.1 A Equação Básica da Estática dos Fluidos

Essa é uma equação vetorial, o que significa que ela é equivalente a três equações de componentes que devem ser satisfeitas individualmente. As equações de componentes são:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x &= 0 && x \text{ direção} \\ -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y &= 0 && y \text{ direção} \\ -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z &= 0 && z \text{ direção} \end{aligned} \right\}$$

Se o sistema de coordenadas for escolhido com o eixo z apontando verticalmente para cima, como mostrado na Fig. 3.1, então  $g_x=0$ ,  $g_y=0$ ,  $g_z=-g$ . Sob tais condições, as equações das componentes tornam-se

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

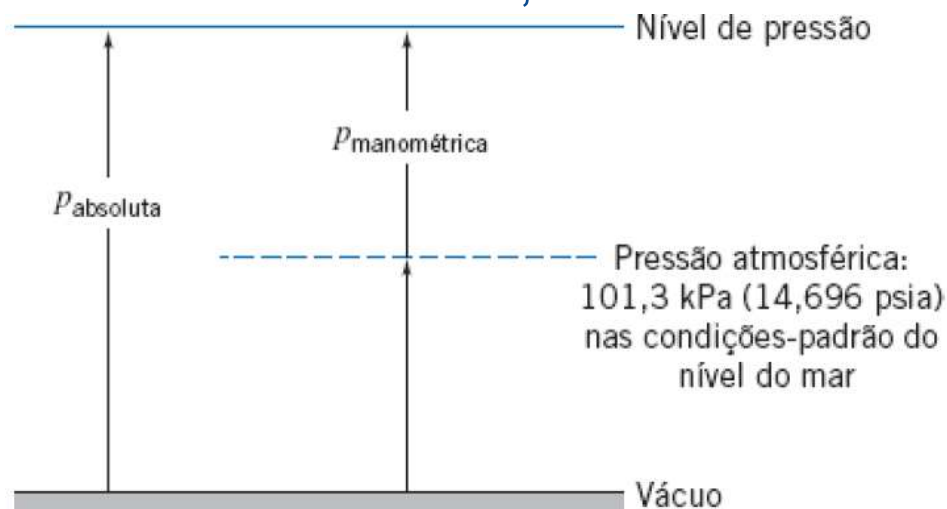
$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \equiv -\gamma$$



## 3.1 A Equação Básica da Estática dos Fluidos

Os valores de pressão devem ser estabelecidos em relação a um nível de referência. Se o nível de referência for o vácuo, as pressões são denominadas absolutas, como mostrado na Fig. 3.2.

A maioria dos medidores de pressão indica uma diferença de pressão — a diferença entre a pressão medida e aquela do ambiente (usualmente a pressão atmosférica). Os níveis de pressão medidos em relação à pressão atmosférica são denominados pressões manométricas. Assim,



$$P_{\text{manométrica}} = P_{\text{absoluta}} - P_{\text{atmosférica}}$$

Pressões absolutas devem ser empregadas em todos os cálculos com a equação de gás ideal ou com outras equações de estado.

Fig. 3.2 Pressões absoluta e manométrica mostrando os níveis de referência.

## 3.2 Variação de pressão em um fluido estático

### 3.2.1. Líquidos Incompressíveis (Manômetros)

Para um fluido incompressível,  $\rho = \text{constante}$

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g = \text{constante}$$

Para determinar a variação de pressão, devemos integrar e aplicar condições de contorno apropriadas. Se a pressão no nível de referência,  $z_0$ , for designada como  $p_0$ , então a pressão  $p$  no nível  $z$  é encontrada por integração:

$$\int_{p_0}^p dp = - \int_{z_0}^z \rho g dz$$

Com  $h$  medido positivo para baixo, temos

$$z_0 - z = h$$

$$p - p_0 = -\rho g(z - z_0) = \rho g(z_0 - z)$$

$$p - p_0 = \Delta p = \rho gh$$

## 3.2 Variação de pressão em um fluido estático

### 3.2.1. Líquidos Incompressíveis (Manômetros)

$$p - p_0 = \Delta p = \rho gh$$



#### Importante!

A Eq. indica que a diferença de pressão entre dois pontos em um fluido estático pode ser determinada pela medida da diferença de elevação entre os dois pontos. Os dispositivos utilizados com esse propósito são chamados de manômetros.

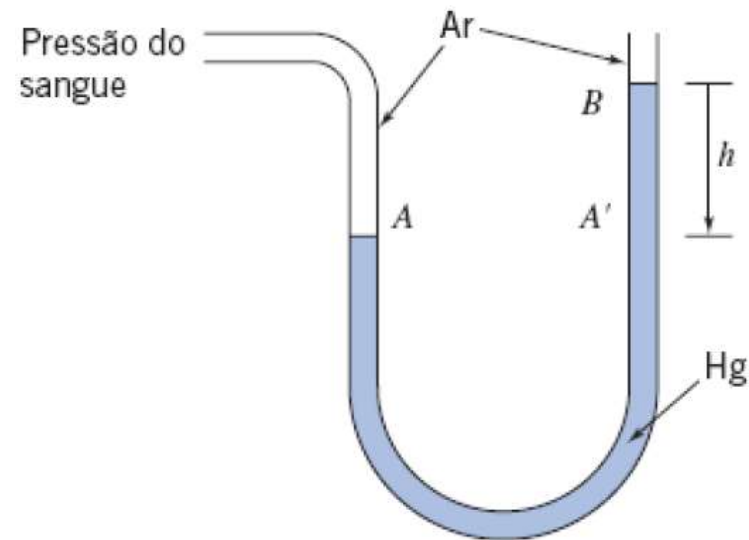
Os manômetros são aparelhos simples e baratos usados com frequência em medições de pressão. Como a mudança de nível do líquido é muito pequena para pequenas diferenças de pressão, o manômetro de tubo em U pode dificultar leituras mais precisas. A sensibilidade de um manômetro é uma medida do quão sensível ele é comparado a um manômetro simples de tubo em U cheio com água.



## Exemplo

### Pressão Sistólica e Diastólica

A pressão sanguínea normal em um ser humano é de 120/80 mmHg. Simulando um manômetro de tubo em U como um esfigmomanômetro (medidor de pressão arterial), converta essas pressões para kPa.





## Exemplo

### Pressão Sistólica e Diastólica

Aplicando a equação governante entre os pontos  $A'$  e  $B$  (como  $p_B$  é a pressão atmosférica, o seu valor manométrico é zero):

$$p_{A'} = p_B + \rho_{\text{Hg}}gh = SG_{\text{Hg}}\rho_{\text{H}_2\text{O}}gh$$

Além disso, a pressão aumenta quando se desce no fluido do ponto  $A'$  ao fundo do manômetro, e diminui de igual quantidade quando se sobe pelo ramo esquerdo até o ponto  $A$ . Portanto, os pontos  $A$  e  $A'$  têm a mesma pressão e, assim,

$$p_A = p_{A'} = SG_{\text{Hg}}\rho_{\text{H}_2\text{O}}gh$$

Substituindo  $SG_{\text{Hg}} = 13,6$  e  $\rho_{\text{H}_2\text{O}} = 1000 \text{ kg/m}^3$  do Apêndice A.1, resulta para a pressão sistólica ( $h = 120 \text{ mmHg}$ )

$$\begin{aligned} p_{\text{sistólica}} = p_A &= 13,6 \times 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 120 \frac{\text{m}}{100} \times \frac{\text{N} \cdot \text{s}^2}{\text{kg} \cdot \text{m}} \\ &= 16.000 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 16 \text{ kPa} \end{aligned}$$

Por um processo similar, a pressão diastólica ( $h = 80 \text{ mmHg}$ ) é

$$p_{\text{diastólica}} = 10,67 \text{ kPa} \leftarrow p_{\text{diastólica}}$$

## 3.2 Variação de pressão em um fluido estático

### 3.2.1. Líquidos Incompressíveis (Manômetros)

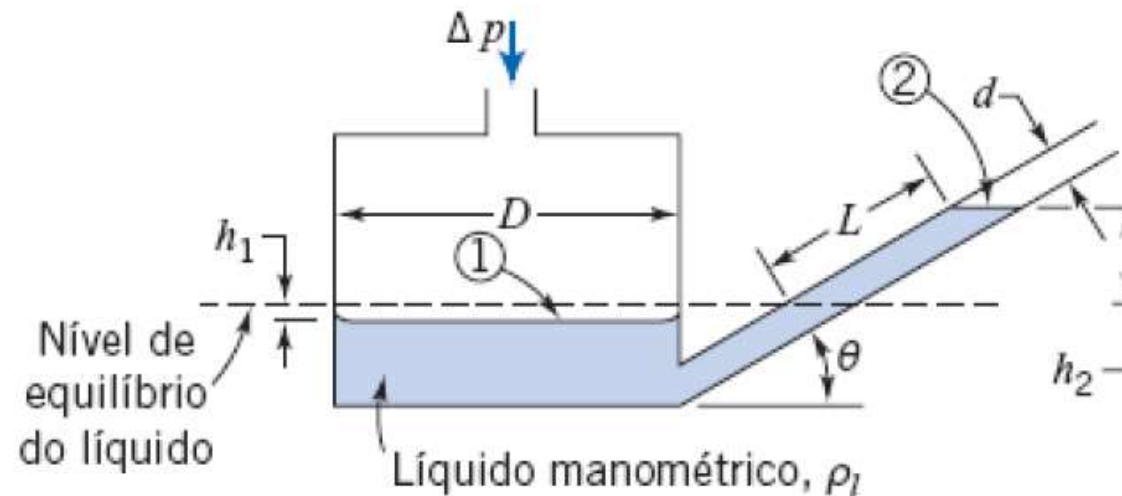
Especificamente, a sensibilidade é definida como a razão entre a deflexão do manômetro e aquela do manômetro de tubo em U com água para uma mesma diferença de pressão  $\Delta p$  aplicada. A sensibilidade pode ser aumentada, modificando-se o projeto do manômetro ou por meio do uso de dois líquidos imiscíveis com massas específicas ligeiramente diferentes.



## Exemplo

### Análise de manômetro de Tubo Inclinado

Um manômetro de reservatório com tubo inclinado é construído como mostrado. Deduza uma expressão geral para a deflexão do líquido,  $L$ , no tubo inclinado, em termos da diferença de pressão aplicada,  $\Delta p$ . Obtenha, também, uma expressão geral para a sensibilidade do manômetro e discuta os efeitos sobre a sensibilidade exercida nos parâmetros  $D$ ,  $d$ ,  $\theta$  e  $SG$ .





## Exemplo

### Análise de manômetro de Tubo Inclinado

Aplicando as equações governantes entre os pontos 1 e 2, obtemos

$$p_1 - p_2 = \Delta p = \rho_l g (h_1 + h_2) \quad (1)$$

Para eliminar  $h_1$ , usamos a condição de que o *volume* do líquido no manômetro permanece constante; o volume deslocado do reservatório deve ser igual ao volume que sobe na coluna do tubo, e então

$$\frac{\pi D^2}{4} h_1 = \frac{\pi d^2}{4} L \quad \text{ou} \quad h_1 = L \left( \frac{d}{D} \right)^2$$

Além disso, a partir da geometria do manômetro,  $h_2 = L \sin \theta$ . Substituindo na Eq. 1, resulta

$$\Delta p = \rho_l g \left[ L \sin \theta + L \left( \frac{d}{D} \right)^2 \right] = \rho_l g L \left[ \sin \theta + \left( \frac{d}{D} \right)^2 \right]$$

Então

$$L = \frac{\Delta p}{\rho_l g \left[ \sin \theta + \left( \frac{d}{D} \right)^2 \right]} \quad \leftarrow L$$





## Exemplo

### Análise de manômetro de Tubo Inclinado

Para obter a sensibilidade do manômetro, nós precisamos comparar a deflexão acima com a deflexão  $h$  de um manômetro comum de tubo em U, usando água (massa específica  $\rho$ ), e que é dada por

$$h = \frac{\Delta p}{\rho g}$$

Então, a sensibilidade  $s$  é

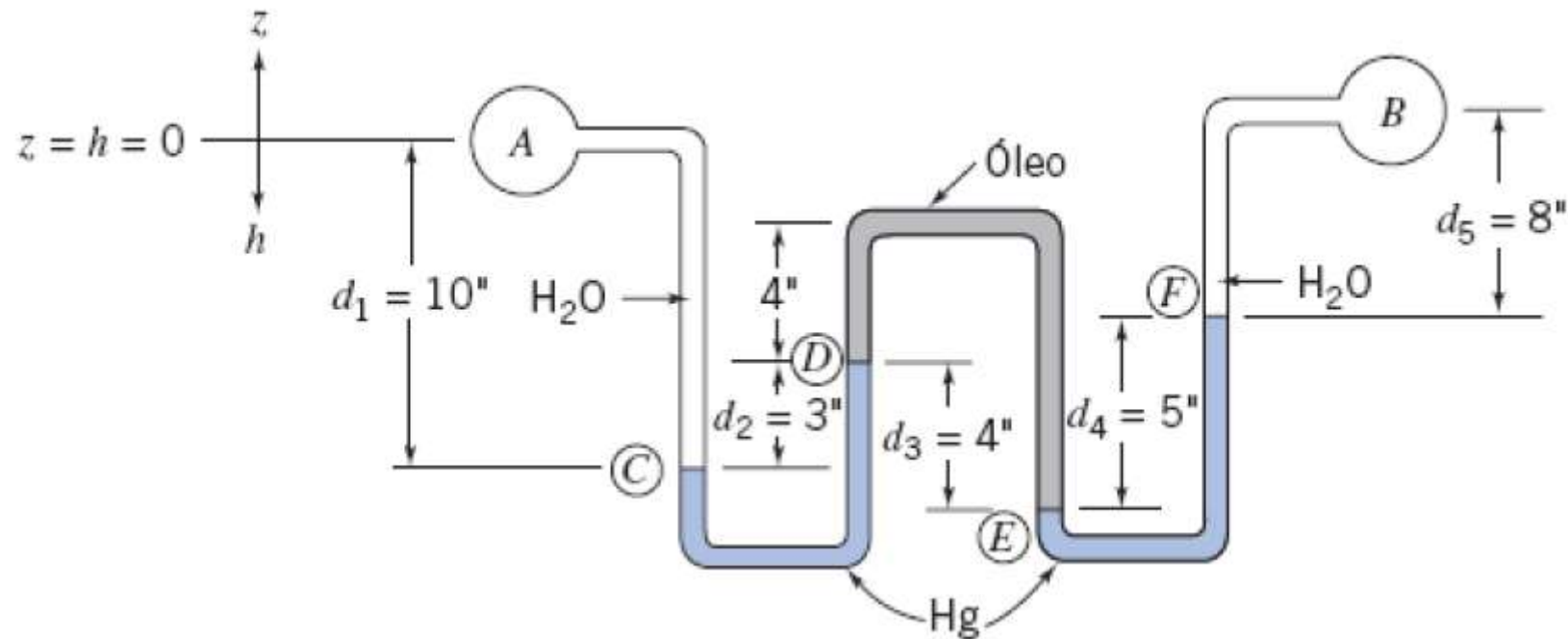
$$s = \frac{L}{h} = \frac{1}{SG_l \left[ \sin \theta + \left( \frac{d}{D} \right)^2 \right]}$$

em que  $SG_l = \rho_l/\rho$ . Essa fórmula mostra que, para aumentar a sensibilidade, os parâmetros  $SG_l$ ,  $\sin \theta$  e  $d/D$  devem ser tão pequenos quanto possível. Portanto, o projetista do aparelho deve escolher um líquido manométrico e de dois parâmetros geométricos conforme discutido a seguir.



## Exemplo Manômetro de Múltiplos Líquidos

Água escoa no interior dos tubos  $A$  e  $B$ . Óleo lubrificante está na parte superior do tubo em U invertido. Mercúrio está na parte inferior dos dois tubos em U. Determine a diferença de pressão,  $p_A - p_B$ , nas unidades kPa.





## Exemplo Manômetro de Múltiplos Líquidos

Trabalhando do ponto  $B$  para o ponto  $A$  com a aplicação das equações básicas, obtemos:

$$p_A - p_B = \Delta p = g(\rho_{\text{H}_2\text{O}}d_5 + \rho_{\text{Hg}}d_4 - \rho_{\text{óleo}}d_3 + \rho_{\text{Hg}}d_2 - \rho_{\text{H}_2\text{O}}d_1) \quad (1)$$

Essa equação também pode ser deduzida pelo uso repetido da Eq. 3.7 na seguinte forma:

$$p_2 - p_1 = \rho g(h_2 - h_1)$$

Iniciando no ponto  $A$  e aplicando a equação entre os pontos sucessivos ao longo do manômetro, obtemos:

$$p_C - p_A = + \rho_{\text{H}_2\text{O}}g d_1$$

$$p_D - p_C = - \rho_{\text{Hg}}g d_2$$

$$p_E - p_D = + \rho_{\text{óleo}}g d_3$$

$$p_F - p_E = - \rho_{\text{Hg}}g d_4$$

$$p_B - p_F = - \rho_{\text{H}_2\text{O}}g d_5$$



## Exemplo Manômetro de Múltiplos Líquidos

A Eq. (1) é obtida multiplicando cada uma dessas equações por  $-1$  e somando-as em seguida

$$\begin{aligned} p_A - p_B &= (p_A - p_C) + (p_C - p_D) + (p_D - p_E) + (p_E - p_F) + (p_F - p_B) \\ &= -\rho_{\text{H}_2\text{O}}gd_1 + \rho_{\text{Hg}}gd_2 - \rho_{\text{óleo}}gd_3 + \rho_{\text{Hg}}gd_4 + \rho_{\text{H}_2\text{O}}gd_5 \end{aligned}$$

Substituindo  $\rho = SG\rho_{\text{H}_2\text{O}}$ , com  $SG_{\text{Hg}} = 13,6$  e  $SG_{\text{óleo}} = 0,88$  (Tabela A.2), resulta

$$\begin{aligned} p_A - p_B &= g(-\rho_{\text{H}_2\text{O}}d_1 + 13,6\rho_{\text{H}_2\text{O}}d_2 - 0,88\rho_{\text{H}_2\text{O}}d_3 + 13,6\rho_{\text{H}_2\text{O}}d_4 + \rho_{\text{H}_2\text{O}}d_5) \\ &= g\rho_{\text{H}_2\text{O}}(-d_1 + 13,6d_2 - 0,88d_3 + 13,6d_4 + d_5) \end{aligned}$$

$$p_A - p_B = g\rho_{\text{H}_2\text{O}}(-250 + 1020 - 88 + 1700 + 200) \text{ mm}$$

$$p_A - p_B = g\rho_{\text{H}_2\text{O}} \times 2582 \text{ mm}$$

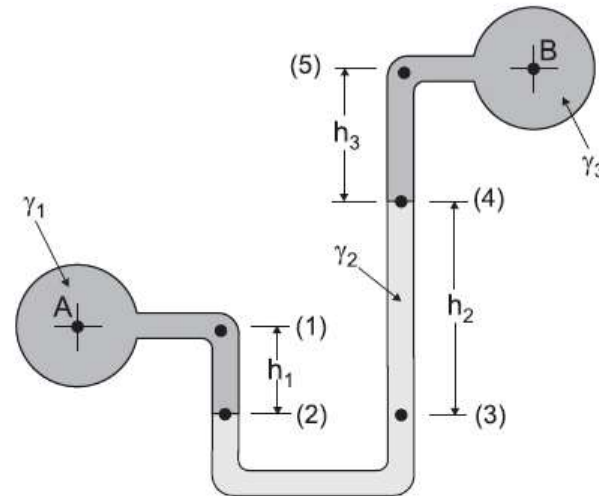
$$= 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 2582 \frac{\text{m}}{1000} \times \frac{\text{N} \cdot \text{s}^2}{\text{kg} \cdot \text{m}}$$

$$p_A - p_B = 25,33 \text{ kPa} \leftarrow p_A - p_B$$



# Estudo Dirigido Atividade em grupo (em sala)

30



Munson, B.R. *et al.* **Fundamentos da Mecânica dos Fluidos**. Edgar Blucher, 2004.

A figura acima ilustra um manômetro com tubo em U, muito utilizado para medir diferenças de pressão. Considerando que os pesos específicos dos três fluidos envolvidos estão indicados na figura por  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ , e  $\gamma_3$ , a diferença de pressão  $p_A - p_B$  corresponde a

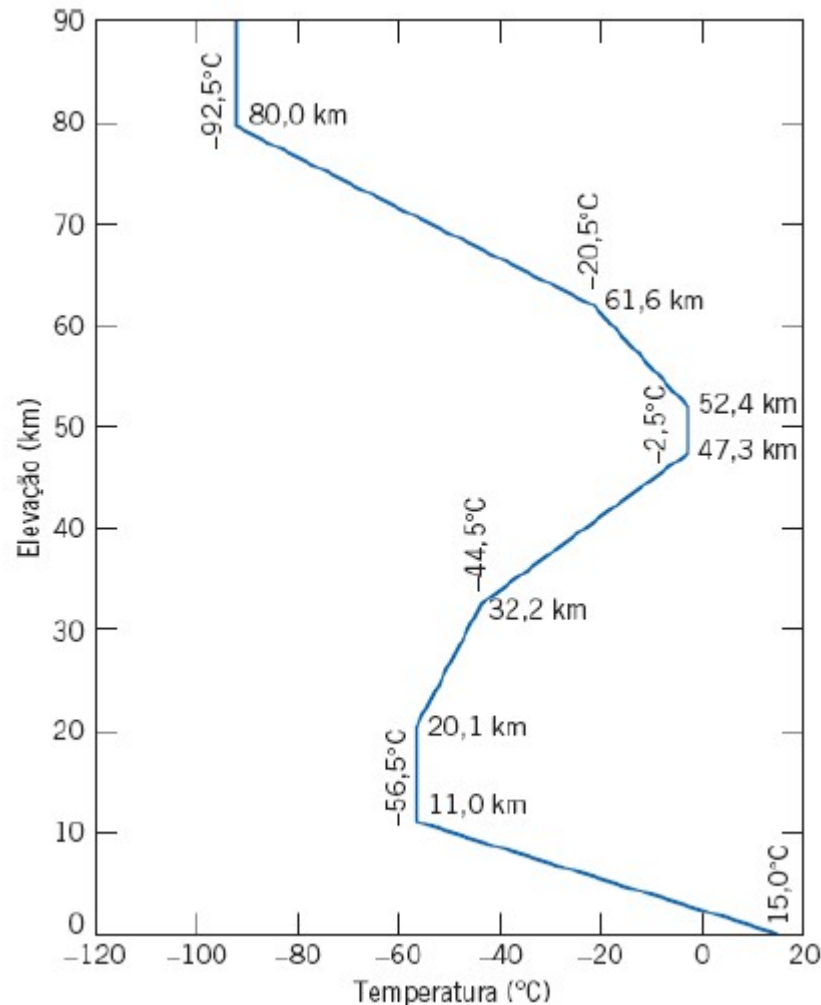
- (A)  $\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 + \gamma_3 h_3$
- (C)  $\gamma_2 h_2 + \gamma_3 h_3 - \gamma_1 h_1$
- (E)  $(\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 + \gamma_3 h_3)/3$

- (B)  $\gamma_1 h_1 - \gamma_2 h_2 + \gamma_3 h_3$
- (D)  $\gamma_2 h_2 - \gamma_3 h_3 - \gamma_1 h_1$

**ENGENHEIRO(A): DE EQUIPAMENTOS JÚNIOR MECÂNICA – 2010.**



### 3.3 A Atmosfera Padrão



Uma Atmosfera Padrão Internacional (API) foi definida pela Organização da Aviação Civil Internacional (OACI). O perfil de temperatura da Atmosfera Padrão é mostrado na Fig. 3.3.

$$P = 101,325 \left(1 - 2,25577 \times 10^{-5} h\right)^{5,2559}$$

$h \rightarrow -500m < altitude < 11000m$

Fig. 3.3 Variação da temperatura com a altitude na Atmosfera- Padrão nos Estados Unidos.

## 3.3 A Atmosfera Padrão

Tabela de Atmosfera Padrão

$z$ , m	$T$ , K	$p$ , Pa	$\rho$ , kg/m <sup>3</sup>	$a$ , m/s	$z$ , m	$T$ , K	$p$ , Pa	$\rho$ , kg/m <sup>3</sup>	$a$ , m/s
-500	291.41	107,508	1.2854	342.2	12,000	216.66	19,312	0.3106	295.1
0	288.16	101,350	1.2255	340.3	12,500	216.66	17,847	0.2870	295.1
500	284.91	95,480	1.1677	338.4	13,000	216.66	16,494	0.2652	295.1
1,000	281.66	89,889	1.1120	336.5	13,500	216.66	15,243	0.2451	295.1
1,500	278.41	84,565	1.0583	334.5	14,000	216.66	14,087	0.2265	295.1
2,000	275.16	79,500	1.0067	332.6	14,500	216.66	13,018	0.2094	295.1
2,500	271.91	74,684	0.9570	330.6	15,000	216.66	12,031	0.1935	295.1
3,000	268.66	70,107	0.9092	328.6	15,500	216.66	11,118	0.1788	295.1
3,500	265.41	65,759	0.8633	326.6	16,000	216.66	10,275	0.1652	295.1
4,000	262.16	61,633	0.8191	324.6	16,500	216.66	9,496	0.1527	295.1
4,500	258.91	57,718	0.7768	322.6	17,000	216.66	8,775	0.1411	295.1
5,000	255.66	54,008	0.7361	320.6	17,500	216.66	8,110	0.1304	295.1
5,500	252.41	50,493	0.6970	318.5	18,000	216.66	7,495	0.1205	295.1
6,000	249.16	47,166	0.6596	316.5	18,500	216.66	6,926	0.1114	295.1
6,500	245.91	44,018	0.6237	314.4	19,000	216.66	6,401	0.1029	295.1
7,000	242.66	41,043	0.5893	312.3	19,500	216.66	5,915	0.0951	295.1
7,500	239.41	38,233	0.5564	310.2	20,000	216.66	5,467	0.0879	295.1
8,000	236.16	35,581	0.5250	308.1	22,000	218.6	4,048	0.0645	296.4
8,500	232.91	33,080	0.4949	306.0	24,000	220.6	2,972	0.0469	297.8
9,000	229.66	30,723	0.4661	303.8	26,000	222.5	2,189	0.0343	299.1
9,500	226.41	28,504	0.4387	301.7	28,000	224.5	1,616	0.0251	300.4
10,000	223.16	26,416	0.4125	299.5	30,000	226.5	1,197	0.0184	301.7
10,500	219.91	24,455	0.3875	297.3	40,000	250.4	287	0.0040	317.2
11,000	216.66	22,612	0.3637	295.1	50,000	270.7	80	0.0010	329.9
11,500	216.66	20,897	0.3361	295.1	60,000	255.7	22	0.0003	320.6
12,000	216.66	19,312	0.3106	295.1	70,000	219.7	6	0.0001	297.2

## 3.3 A Atmosfera Padrão

### 3.3.1. Hipótese Isotérmica

Os gases são compressíveis, com a densidade aproximadamente proporcional à pressão. Logo, a massa específica deve ser considerada uma variável, se a integração for efetuada a intervalos com grande variação de pressão, a equação dos gases ideais é adequada:

$$P = \rho RT$$

Portanto

$$\frac{dP}{dz} = -\gamma = -\rho g = -\frac{P}{RT} g$$

Separando as variáveis e integrando-se entre dois pontos quaisquer 1 e 2, teremos

$$\int_1^2 \frac{dP}{P} = \ln \frac{P_2}{P_1} = -\frac{g}{R} \int_1^2 \frac{dz}{T}$$

A integral em z requer uma hipótese a respeito da variação  $T(z)$ . Uma aproximação comum é considerar a atmosfera como isotérmica. Assim  $T=T_0$ . Conseqüentemente

$$P_2 = P_1 e^{\left[-\frac{g(z_2-z_1)}{RT_0}\right]}$$

---

A quantidade entre colchetes é adimensional.



## 3.3 A Atmosfera Padrão

### 3.3.2. Hipótese com variação linear de temperatura

Mas a hipótese isotérmica é irrealista. A temperatura atmosférica média da Terra decresce quase linearmente com  $z$  até 11 km (Essa região mais interna da atmosfera é denominada *troposfera*.):

$$T = T_0 - Bz \quad (38)$$

onde  $T_0$  é a temperatura (absoluta) ao nível do mar e  $B$  é a taxa de declínio. Por força de um acordo internacional, os valores de  $T_0$  e  $B$  são padronizados:

$$T_0 = 288,16 \text{ K} = 15^\circ \text{C} \quad (39a)$$

$$B = 0,003566 \text{ R/ft} = 0,0065 \text{ K/m} \quad (39b)$$

$$\begin{aligned} u &= -Bz + T_0 \\ du &= -Bdz \end{aligned}$$

Introduzindo (38) em (36):

$$\begin{aligned} \int_{P_1}^{P_2} \frac{dP}{P} &= -\frac{g}{R} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{T_0 - Bz} \Rightarrow \ln \frac{P_2}{P_1} = -\frac{g}{R} \left( -\frac{1}{B} \right) \int_{u(z_1)}^{u(z_2)} \frac{du}{u} = \frac{g}{RB} \ln[u] \Big|_{u(z_1)}^{u(z_2)} \\ &= \frac{g}{RB} \ln[T_0 - Bz] \Big|_{z_1=0}^{z_2=z} = \frac{g}{RB} \ln \left[ \frac{T_0 - Bz}{T_0} \right] \quad \frac{P_2}{P_1} = \left[ \frac{T_0 - Bz}{T_0} \right]^{\frac{g}{RB}} = \left[ 1 - \frac{Bz}{T_0} \right]^{\frac{g}{RB}} \end{aligned}$$

vem 
$$P = P_a \left[ 1 - \frac{Bz}{T_0} \right]^{\frac{g}{RB}} \quad (40) \quad \text{onde } \frac{g}{RB} = 5,26 \text{ (ar)} \quad (41)$$



## Exemplo

### A Atmosfera Padrão - Hipótese Isotérmica x Hipótese com variação linear de temperatura

**Exemplo 23** – Se a pressão ao nível do mar for igual a 101,325 kPa, calcule a pressão padrão a uma altitude de 5 000 m e à temperatura de 15 °C (288,16 K) pela:

- (a) fórmula exata
- (b) e pela hipótese isotérmica.

(a) Exata:

$$P = P_{atm} \left[ 1 - \frac{BZ}{T_0} \right]^{\frac{g}{RB}} = 101,325 \left[ 1 - \frac{0,065 \cdot 5\,000}{288,16} \right]^{5,26} \cong 54,0 \text{ kPa}$$

(b) Isotérmica:

$$P = P_{atm} e^{-\left[\frac{gZ}{RT_0}\right]} = 101,325 e^{-\left[\frac{9,8 \cdot 5\,000}{287 \cdot 288,16}\right]} \cong 56,0 \text{ kPa}$$

(este resultado é 4% maior que o calculado pela fórmula exata)



## Exemplo – Hipótese Adiabática

**Exemplo 24** – Sob algumas condições, a atmosfera é adiabática, isto é,  $P = c \rho^k$  onde "c" é uma constante "K" é a razão entre calores específicos. Mostre que, para uma atmosfera adiabática, a variação de pressão é dada por

$$P = P_0 \left[ 1 - \frac{(k-1)gz}{kRT_0} \right]^{\frac{k}{k-1}}$$

Compare esta fórmula para o ar em  $z = 5.000$  m, com as propriedades para a atmosfera padrão da tabela apresentada em seguida. Dados:  $P_0 = 1,01325 \times 10^5$  Pa,  $k = 1,4$  (adiabática),  $g = 9,81$  m/s<sup>2</sup> e  $R = 8,314$  Pa.m<sup>3</sup>.K<sup>-1</sup>.mol<sup>-1</sup>. Introduza a hipótese adiabática na relação básica da hidrostática [eq. (32)].

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g \Rightarrow \frac{d(C_1 \rho^k)}{dz} = k C_1 \rho^{k-1} \frac{d\rho}{dz}$$

Separando as variáveis e integrando:

$$\int C_1 \rho^{k-2} d\rho = - \int \frac{g}{k} dz \Rightarrow C_1 \frac{\rho^{k-1}}{k-1} = -\frac{gz}{k} + C_2$$

Esta constante de integração está relacionada com  $z = 0$ , isto é,  $C_2 = C_1 \frac{\rho_0^{k-1}}{k-1}$ .

$$C_1 \frac{\rho^{k-1}}{k-1} = -\frac{gz}{k} + C_1 \frac{\rho_0^{k-1}}{k-1} \Rightarrow \frac{C_1}{k-1} (\rho^{k-1} - \rho_0^{k-1}) = -\frac{gz}{k} \Rightarrow \frac{C_1 \rho_0^{k-1}}{(k-1)} \left( \frac{\rho^{k-1}}{\rho_0^{k-1}} - 1 \right) = -\frac{gz}{k}$$

$$\left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{k-1} - 1 = -\frac{gz}{k} \left[ \frac{(k-1)}{C_1 \rho_0^{k-1}} \right] \Rightarrow \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{k-1} = 1 - \frac{gz}{k} \left[ \frac{(k-1)}{C_1 \rho_0^{k-1}} \right] = \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{(k-1)}{k}} \text{ considerando que } p = C_1 \rho^k$$

Finalmente, repare que  $C_1 \rho_0^{k-1} = C_1 \frac{\rho_0^k}{\rho_0} = \frac{p_0}{\rho_0} = RT_0$ , onde  $T_0$  é a temperatura da superfície. Assim, a relação da pressão final desejada para uma atmosfera adiabática é

$$\frac{P}{P_0} = \left[ 1 - \frac{(k-1)gz}{kRT_0} \right]^{\frac{k}{k-1}}$$

A 5.000 m, a tabela fornece  $p = 54.008$  Pa, enquanto a fórmula adiabática, com  $k = 1,4$ , fornece  $p = 52.896$  Pa, um valor 2,1% menor.



## Estudo Dirigido

### Variação da pressão e da massa específica da atmosfera (**Estudo de Caso 1**).

A máxima capacidade de fornecimento de potência de um motor de combustão interna decresce com a altitude porque a massa específica do ar e, portanto, a vazão mássica de ar decresce. Um caminhão parte de Denver (elevação de 1610 m) em um dia em que a temperatura e a pressão barométrica são, respectivamente, 27°C e 630 mm de mercúrio. Ele passa por Vail Pass (elevação de 3230 m), onde a temperatura é de 17°C. Determine a pressão barométrica em Vail Pass e a variação percentual na massa específica do ar entre as duas cidades.





## Estudo Dirigido

### Variação da pressão e da massa específica da atmosfera (**Estudo de Caso 1**).

Vamos considerar quatro hipóteses para as variações de propriedades com a altitude.

(a) Supondo que a massa específica varie linearmente com a altitude, a Eq. 3.9 fornece

$$\frac{p}{p_0} = \left( \frac{T}{T_0} \right)^{g/mR}$$

A avaliação da constante  $m$  dá

$$m = \frac{T_0 - T}{z - z_0} = \frac{(27 - 17)^\circ\text{C}}{(3230 - 1610) \text{ m}} = 6,17 \times 10^{-3} \text{ }^\circ\text{C/m}$$

e

$$\frac{g}{mR} = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times \frac{1}{6,17 \times 10^{-3}} \times \frac{1}{286,9 \text{ J/kg}^\circ\text{K}} \times \frac{\text{N} \cdot \text{s}^2}{\text{kg} \cdot \text{m}} \times \frac{\text{J}}{\text{N} \cdot \text{m}} = 5,54$$

Então

$$\frac{p}{p_0} = \left( \frac{T}{T_0} \right)^{g/mR} = \left( \frac{273 + 17}{273 + 27} \right)^{5,54} = (0,967)^{5,54} = 0,829$$





## Estudo Dirigido

### Variação da pressão e da massa específica da atmosfera (**Estudo de Caso 1**).

$$p = 0,829 p_0 = (0,829)630 \text{ mmHg} = 522,3 \text{ mmHg} = 69,6 \text{ kPa} \leftarrow \frac{p}{p_0}$$

Note que a temperatura deve ser expressa como uma temperatura absoluta na equação de gás ideal.

A variação percentual na massa específica é dada por

$$\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = \frac{\rho}{\rho_0} - 1 = \frac{p}{p_0} \frac{T_0}{T} - 1 = \frac{0,829}{0,967} - 1 = -0,143 \quad \text{ou} \quad -14,3\% \leftarrow \frac{\Delta \rho}{\rho_0}$$

(b) Supondo a massa específica do ar constante e igual a  $\rho_0$ , temos

$$p = p_0 - \rho_0 g(z - z_0) = p_0 - \frac{\rho_0 g(z - z_0)}{RT_0} = p_0 \left[ 1 - \frac{g(z - z_0)}{RT_0} \right]$$
$$p = 513,3 \text{ mmHg} = 68,4 \text{ kPa} \quad \text{e} \quad \frac{\Delta \rho}{\rho_0} = 0 \quad \leftarrow \frac{p, \Delta \rho}{\rho_0}$$





## Estudo Dirigido

### Variação da pressão e da massa específica da atmosfera (**Estudo de Caso 1**).

(c) Supondo a temperatura constante, temos

$$dp = -\rho g dz = -\frac{p}{RT} g dz$$

e

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = - \int_{z_0}^z \frac{g}{RT} dz$$
$$p = p_0 \exp \left[ \frac{-g(z - z_0)}{RT} \right]$$

Para  $T = \text{constante} = T_0$

$$p = 523,8 \text{ mmHg} = 69,8 \text{ kPa} \quad \text{e} \quad \frac{\Delta \rho}{\rho_0} = -16,9\% \quad \leftarrow \quad p, \frac{\Delta \rho}{\rho_0}$$

(d) Supondo uma atmosfera adiabática,  $p/\rho^k = \text{constante}$ , e assim

$$p = p_0 \left( \frac{T}{T_0} \right)^{k/k-1} = 559,5 \text{ mmHg} = 74,6 \text{ kPa} \quad \text{e} \quad \frac{\Delta \rho}{\rho_0} = -8,2\% \quad \leftarrow \quad p, \frac{\Delta \rho}{\rho_0}$$





## Estudo Dirigido

# Varição da pressão e da massa específica da atmosfera (Estudo de Caso 1).

### Conclusão:

Podemos notar que, para variações modestas na altitude, a pressão predita não é muito dependente da forma suposta para a variação de propriedades; os valores calculados para as quatro diferentes hipóteses apresentam um desvio máximo em torno de 9%. Há um desvio consideravelmente maior na variação percentual da massa específica. A hipótese de variação linear da temperatura com a altitude é a suposição mais razoável.





## 3.4 Forças Hidrostáticas sobre Superfícies Submersas

Agora que já determinamos a maneira pela qual a pressão varia em um fluido estático, podemos examinar a força que atua sobre uma superfície submersa em um líquido.

Para determinar completamente a resultante de força atuando sobre uma superfície submersa, devemos especificar:

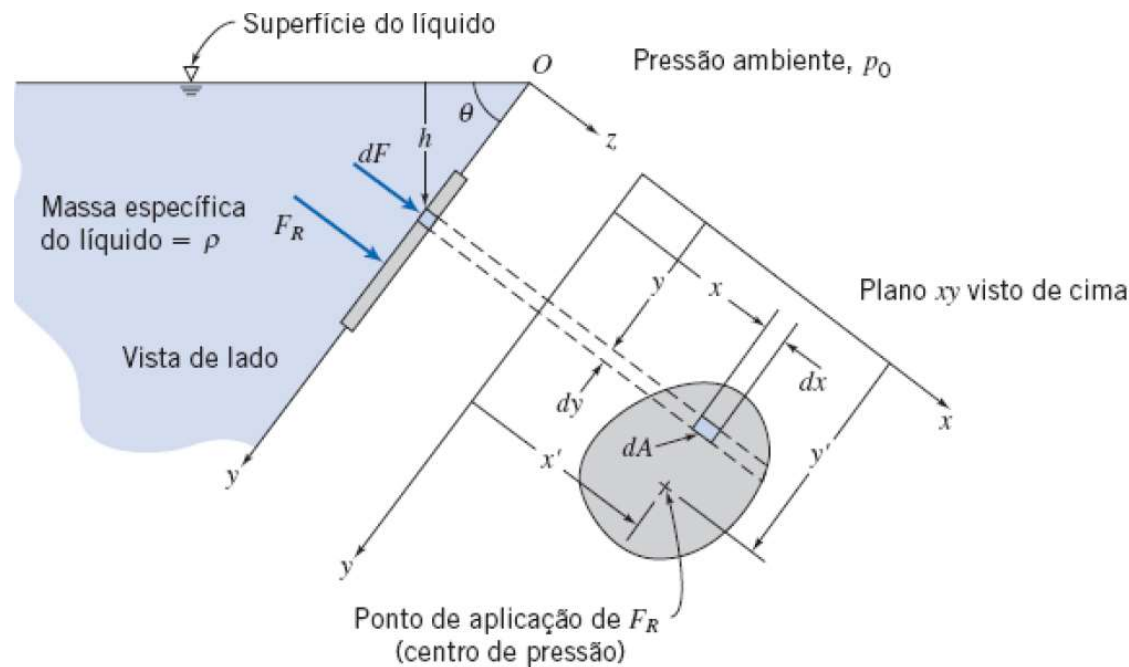
1. O módulo da força.
2. O sentido da força.
3. A linha de ação da força.

Consideraremos tanto superfícies submersas **planas** quanto **curvas**.

## 3.4 Forças Hidrostáticas sobre Superfícies Submersas

### 3.4.1. Superfície Plana

A Fig. 3.5 mostra uma superfície plana submersa em cuja face superior nós queremos achar a força hidrostática resultante. As coordenadas foram escolhidas de modo que a superfície situa-se no plano  $xy$  e a origem  $O$  está localizada na interseção da superfície plana (ou de sua extensão) com a superfície livre.



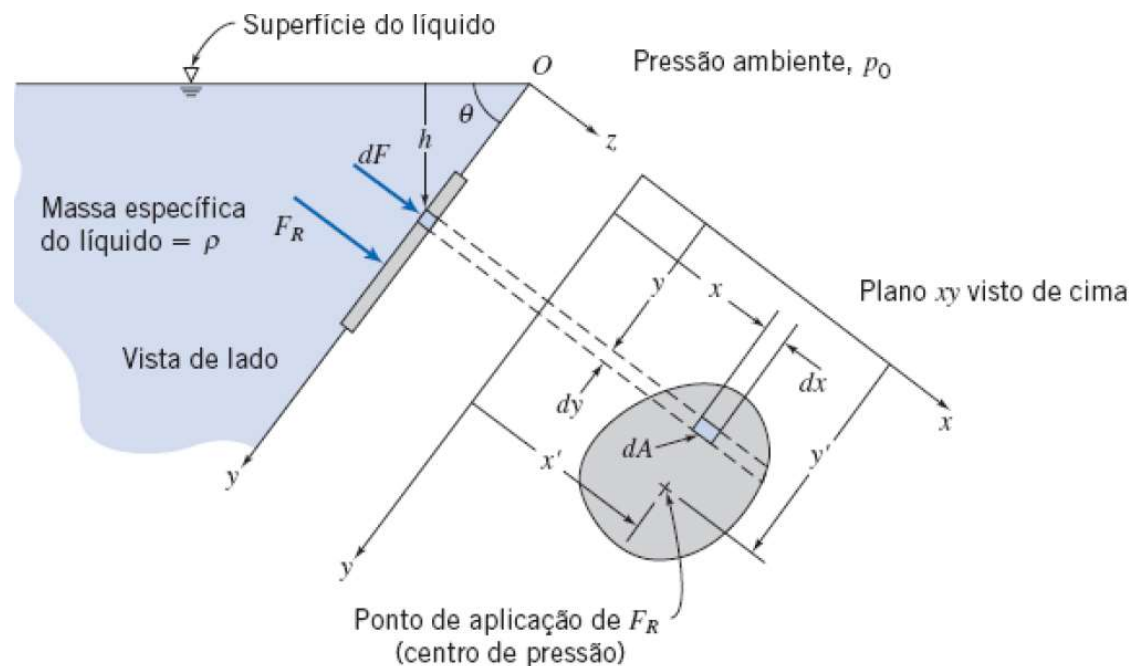
Além do módulo da força resultante,  $F_R$ , também desejamos localizar o ponto (de coordenadas  $x'$ ,  $y'$ ) de aplicação dessa força sobre a superfície.

## 3.4 Forças Hidrostáticas sobre Superfícies Submersas

### 3.4.1. Superfície Plana

Como não há tensões de cisalhamento em um fluido em repouso, a força hidrostática sobre qualquer elemento da superfície age normalmente à superfície. A força de pressão atuando sobre um elemento  $dA = dx dy$  da face superior é dada por

$$dF = p dA$$



A força resultante agindo sobre a superfície é encontrada somando as contribuições das forças infinitesimais sobre a área inteira

$$F_R = \int_A p dA$$

# 3.4 Forças Hidrostáticas sobre Superfícies Submersas

## 3.4.1. Superfície Plana

Podemos expressar a pressão  $p$  em uma profundidade  $h$  do líquido como  $p = p_0 + \rho gh$  da geometria do sistema, que  $h = y \text{ sen } \theta$ .

$$F_R = \int_A p \, dA = \int_A (p_0 + \rho gh) \, dA = \int_A (p_0 + \rho g y \text{ sen } \theta) \, dA$$

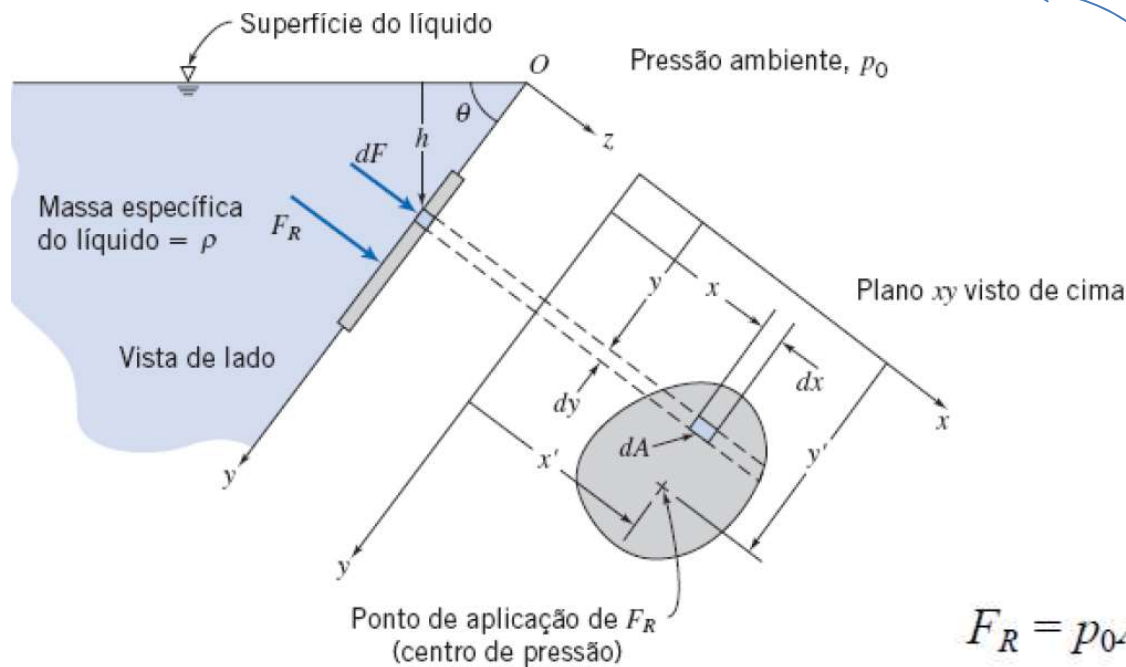
$$F_R = p_0 \int_A dA + \rho g \text{ sen } \theta \int_A y \, dA = p_0 A + \rho g \text{ sen } \theta \int_A y \, dA$$

integral é o primeiro momento de área da superfície em torno do eixo  $x$

$$\int_A y \, dA = y_c A$$

em que  $y_c$  é a coordenada  $y$  do centróide da área  $A$ . Então,

$$F_R = p_0 A + \rho g \text{ sen } \theta y_c A = (p_0 + \rho g h_c) A$$

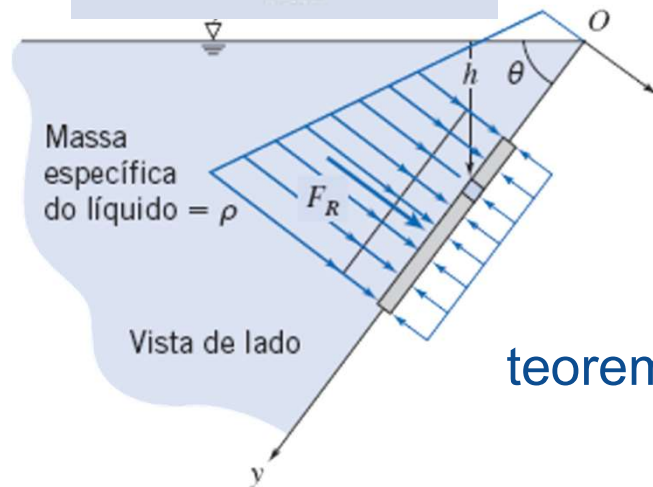


## 3.4 Forças Hidrostáticas sobre Superfícies Submersas

### 3.4.1. Superfície Plana

Nossa próxima tarefa é determinar  $(x', y')$  a localização do ponto de aplicação da força resultante. Vamos primeiramente obter  $y'$ , reconhecendo que o momento da força resultante em torno do eixo  $x$  deve ser igual ao momento devido à força distribuída da pressão.

$$y'F_R = \int_A yp \, dA$$



Como feito anteriormente...

$$\begin{aligned} y'F_R &= \int_A yp \, dA = \int_A y(p_0 + \rho gh) \, dA = \int_A (p_0 y + \rho gy^2 \text{sen} \theta) \, dA \\ &= p_0 \int_A y \, dA + \rho g \text{sen} \theta \int_A y^2 \, dA \end{aligned}$$

A segunda integral,  $\int_A y^2 \, dA$ , é o segundo momento de área em torno do eixo  $x$ ,  $I_{xx}$

teorema dos eixos paralelos  $I_{xx} = \bar{I}_{\hat{x}\hat{x}} + Ay_c^2$

$$\begin{aligned} y'F_R &= p_0 y_c A + \rho g \text{sen} \theta (I_{\hat{x}\hat{x}} + Ay_c^2) = y_c (p_0 + \rho g y_c \text{sen} \theta) A + \rho g \text{sen} \theta I_{\hat{x}\hat{x}} \\ &= y_c (p_0 + \rho g h_c) A + \rho g \text{sen} \theta I_{\hat{x}\hat{x}} = y_c F_R + \rho g \text{sen} \theta I_{\hat{x}\hat{x}} \end{aligned}$$

$$y' = y_c + \frac{\rho g \text{sen} \theta I_{\hat{x}\hat{x}}}{F_R}$$

## 3.4 Forças Hidrostáticas sobre Superfícies Submersas

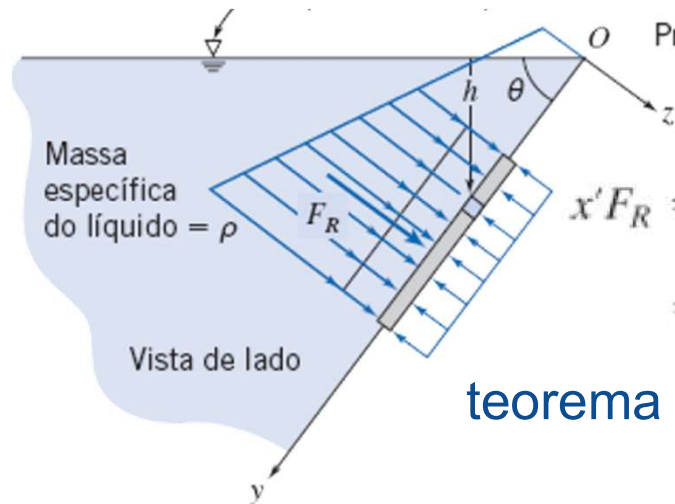
### 3.4.1. Superfície Plana

É conveniente para calcular  $y'$  quando o interesse é na força líquida, no caso em que a mesma pressão  $p_0$  atua sobre os dois lados da superfície submersa. Assim...

$$y' = y_c + \frac{\rho g \text{sen}\theta I_{\hat{x}\hat{x}}}{F_R} \rightarrow y' = y_c + \frac{I_{\hat{x}\hat{x}}}{Ay_c}$$

Uma análise similar pode ser feita para calcular  $x'$

$$x'F_R = \int_A x p dA$$



$$\begin{aligned} x'F_R &= \int_A x p dA = \int_A x(p_0 + \rho gh) dA = \int_A (p_0 x + \rho g x y \text{sen}\theta) dA \\ &= p_0 \int_A x dA + \rho g \text{sen}\theta \int_A x y dA \end{aligned}$$

teorema dos eixos paralelos

$$I_{xy} = I_{\hat{x}\hat{y}} + Ax_c y_c$$

$$\begin{aligned} x'F_R &= p_0 x_c A + \rho g \text{sen}\theta (I_{\hat{x}\hat{y}} + Ax_c y_c) = x_c (p_0 + \rho g y_c \text{sen}\theta) A + \rho g \text{sen}\theta I_{\hat{x}\hat{y}} \\ &= x_c (p_0 + \rho g h_c) A + \rho g \text{sen}\theta I_{\hat{x}\hat{y}} = x_c F_R + \rho g \text{sen}\theta I_{\hat{x}\hat{y}} \end{aligned}$$

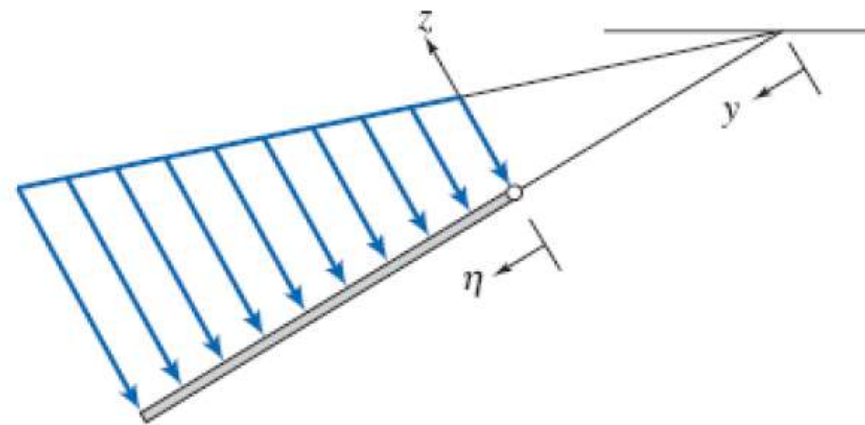
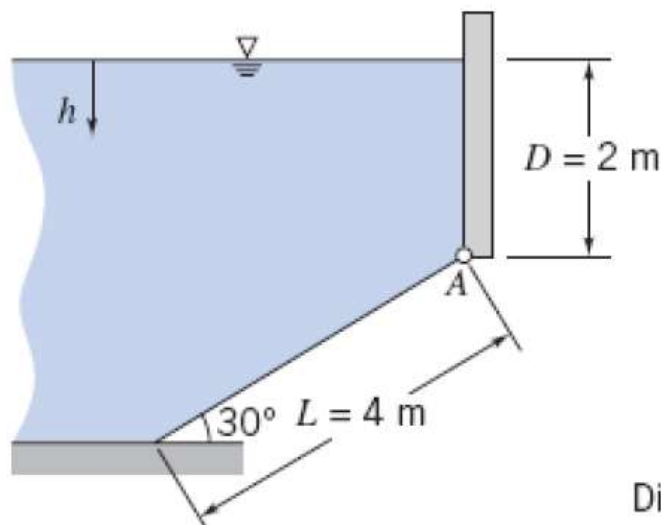
$$x' = x_c + \frac{\rho g \text{sen}\theta I_{\hat{x}\hat{y}}}{F_R} \rightarrow x' = x_c + \frac{I_{\hat{x}\hat{y}}}{Ay_c}$$



## Exemplo

### Forças Hidrostáticas sobre Superfícies Submersas - Superfície Plana

A superfície inclinada mostrada, articulada ao longo de  $A$ , tem 5 m de largura. Determine a força resultante,  $F_R$ , da água e do ar sobre a superfície inclinada.



Distribuição de pressão hidrostática líquida sobre a comporta



## Exemplo

### Forças Hidrostáticas sobre Superfícies Submersas - Superfície Plana

#### Solução:

Para determinar  $F_R$  completamente, devemos encontrar (a) o módulo e (b) a linha de ação da força (o sentido da força é o da normal à superfície em uma convenção de compressão). Resolveremos este problema usando (i) integração direta e (ii) as equações algébricas.

#### Integração Direta

**Equações básicas:**  $p = p_0 + \rho gh$   $F_R = \int_A p dA$   $\eta' F_R = \int_A \eta p dA$   $x' F_R = \int_A xp dA$

Como a pressão atmosférica  $p_0$  age sobre ambos os lados da placa fina, o seu efeito é cancelado. Assim, podemos trabalhar com a pressão hidrostática manométrica ( $p = \rho gh$ ). Além disso, embora *podéssemos* integrar usando a variável  $y$ , será mais conveniente definir aqui uma variável  $\eta$ , conforme mostrado na figura.

Usando  $\eta$  para obter expressões para  $h$  e  $dA$ , resulta

$$h = D + \eta \sin 30^\circ \text{ e } dA = w d\eta$$

Substituindo essas equações na equação básica para a força resultante, obtemos





## Exemplo

### Forças Hidrostáticas sobre Superfícies Submersas - Superfície Plana

$$\begin{aligned}F_R &= \int_A p dA = \int_0^L \rho g (D + \eta \sin 30^\circ) w d\eta \\&= \rho g w \left[ D \eta + \frac{\eta^2}{2} \sin 30^\circ \right]_0^L = \rho g w \left[ DL + \frac{L^2}{2} \sin 30^\circ \right] \\&= 999 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 5 \text{ m} \left[ 2 \text{ m} \times 4 \text{ m} + \frac{16 \text{ m}^2}{2} \times \frac{1}{2} \right] \frac{\text{N} \cdot \text{s}^2}{\text{kg} \cdot \text{m}}\end{aligned}$$

$$F_R = 588 \text{ kN} \leftarrow$$

 $F_R$



## Exemplo

### Forças Hidrostáticas sobre Superfícies Submersas - Superfície Plana

Para a localização da força, calculamos  $\eta'$  (a distância medida a partir da borda superior da placa),

$$\eta' F_R = \int_A \eta p dA$$

Então

$$\begin{aligned} \eta' &= \frac{1}{F_R} \int_A \eta p dA = \frac{1}{F_R} \int_0^L \eta p w d\eta = \frac{\rho g w}{F_R} \int_0^L \eta (D + \eta \sin 30^\circ) d\eta \\ &= \frac{\rho g w}{F_R} \left[ \frac{D\eta^2}{2} + \frac{\eta^3}{3} \sin 30^\circ \right]_0^L = \frac{\rho g w}{F_R} \left[ \frac{DL^2}{2} + \frac{L^3}{3} \sin 30^\circ \right] \\ &= 999 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times \frac{5 \text{ m}}{5,88 \times 10^5 \text{ N}} \left[ \frac{2 \text{ m} \times 16 \text{ m}^2}{2} + \frac{64 \text{ m}^3}{3} \times \frac{1}{2} \right] \frac{\text{N} \cdot \text{s}^2}{\text{kg} \cdot \text{m}} \\ \eta' &= 2,22 \text{ m} \quad \text{e} \quad y' = \frac{D}{\sin 30^\circ} + \eta' = \frac{2 \text{ m}}{\sin 30^\circ} + 2,22 \text{ m} = 6,22 \text{ m} \end{aligned}$$



## Exemplo

### Forças Hidrostáticas sobre Superfícies Submersas - Superfície Plana

Ainda, da consideração de momentos sobre o eixo  $y$  em torno da articulação  $A$ ,

$$x' = \frac{1}{F_R} \int_A xp \, dA$$

No cálculo do momento das forças distribuídas (lado direito da equação), lembre-se dos estudos anteriores de estática, que o centroide do elemento de área deve ser usado para  $x$ . O valor de  $x$  (medido a partir de  $A$  em uma normal ao plano da figura para dentro dela) pode ser tomado igual a  $w/2$ , pois o elemento de área tem largura constante. Assim,

$$x' = \frac{1}{F_R} \int_A \frac{w}{2} p \, dA = \frac{w}{2F_R} \int_A p \, dA = \frac{w}{2} = 2,5 \text{ m.} \quad x'$$



## Exemplo

### Forças Hidrostáticas sobre Superfícies Submersas - Superfície Plana

#### Equações Algébricas

Ao usar as equações algébricas, devemos tomar cuidado para selecionar o conjunto adequado de equações. Neste problema temos que  $p_0 = p_{atm}$  em ambos os lados da placa, de forma que a Eq. 3.10b, com  $p_c$  como uma pressão manométrica, pode ser usada para avaliar a força líquida:

$$F_R = p_c A = \rho g h_c A = \rho g \left( D + \frac{L}{2} \sin 30^\circ \right) L w$$
$$F_R = \rho g w \left[ DL + \frac{L^2}{2} \sin 30^\circ \right]$$

Esta é a mesma expressão que foi obtida por integração direta.  
A coordenada  $y$  do centro de pressão é dada pela Eq. 3.11c:

$$y' = y_c + \frac{I_{xx}}{A y_c} \quad (3.11c)$$



## Exemplo

### Forças Hidrostáticas sobre Superfícies Submersas - Superfície Plana

Para a comporta retangular inclinada, temos

$$y_c = \frac{D}{\sin 30^\circ} + \frac{L}{2} = \frac{2 \text{ m}}{\sin 30^\circ} + \frac{4 \text{ m}}{2} = 6 \text{ m}$$
$$A = Lw = 4 \text{ m} \times 5 \text{ m} = 20 \text{ m}^2$$
$$I_{xx} = \frac{1}{12} wL^3 = \frac{1}{12} \times 5 \text{ m} \times (4 \text{ m})^3 = 26,7 \text{ m}^2$$
$$y' = y_c + \frac{I_{xx}}{Ay_c} = 6 \text{ m} + 26,7 \text{ m}^4 \times \frac{1}{20 \text{ m}^2} \times \frac{1}{6 \text{ m}} = 6,22 \text{ m} \longleftarrow y'$$

A coordenada  $x$  do centro de pressão é dada pela Eq. 3.12c:

$$x' = x_c + \frac{I_{xy}}{Ay_c} \quad (3.12c)$$

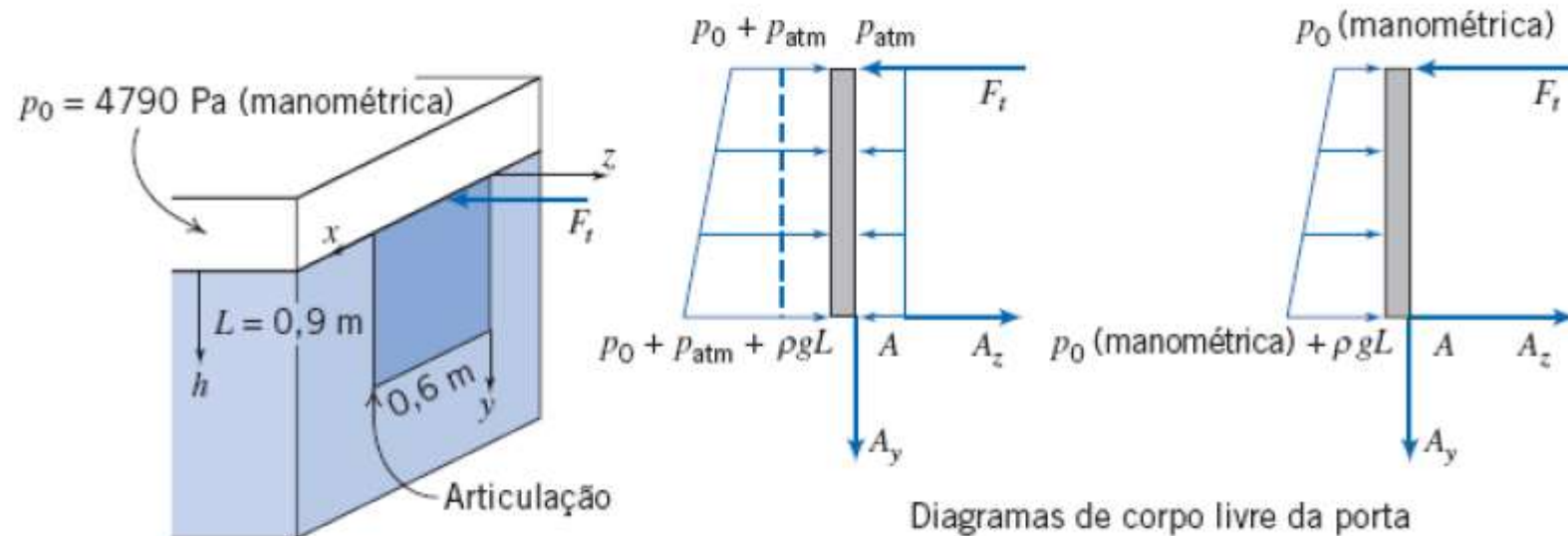
Para a comporta retangular  $I_{xy} = 0$  e  $x' = x_c = 2,5 \text{ m}$ .  $\longleftarrow x'$



# Estudo Dirigido

## Forças Hidrostáticas sobre Superfícies Submersas - Superfície Plana

A porta mostrada na lateral do tanque é articulada ao longo da sua borda inferior. Uma pressão de 4790 Pa (manométrica) é aplicada na superfície livre do líquido. Determine a força,  $F_r$ , requerida para manter a porta fechada.





# Estudo Dirigido

## Forças Hidrostáticas sobre Superfícies Submersas - Superfície Plana

Equações básicas:

$$F_R = p_c A \quad y' = y_c + \frac{\rho g \text{sen } \theta I_{xx}}{F_R} \quad \sum M_A = 0$$

A força resultante e sua localização são

$$F_R = (p_0 + \rho g h_c) A = \left( p_0 + \gamma \frac{L}{2} \right) bL \quad (1)$$

e

$$y' = y_c + \frac{\rho g \text{sen } 90^\circ I_{xx}}{F_R} = \frac{L}{2} + \frac{\gamma b L^3 / 12}{\left( p_0 + \gamma \frac{L}{2} \right) bL} = \frac{L}{2} + \frac{\gamma L^2 / 12}{\left( p_0 + \gamma \frac{L}{2} \right)} \quad (2)$$

Tomando os momentos em torno do ponto  $A$

$$\sum M_A = F_t L - F_R (L - y') = 0 \quad \text{ou} \quad F_t = F_R \left( 1 - \frac{y'}{L} \right)$$





# Estudo Dirigido

## Forças Hidrostáticas sobre Superfícies Submersas - Superfície Plana

Substituindo essa equação nas Eqs. (1) e (2), encontramos

$$F_i = \left(p_0 + \gamma \frac{L}{2}\right) bL \left[1 - \frac{1}{2} - \frac{\gamma L^2/12}{\left(p_0 + \gamma \frac{L}{2}\right)}\right]$$
$$F_i = \left(p_0 + \gamma \frac{L}{2}\right) \frac{bL}{2} + \gamma \frac{bL^2}{12} = \frac{p_0 bL}{2} + \frac{\gamma bL^2}{6}$$
$$= 4790 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \times 0,6 \text{ m} \times 0,9 \text{ m} \times \frac{1}{2} + 15.715 \frac{\text{N}}{\text{m}^3} \times 0,6 \text{ m} \times 0,81 \text{ m}^2 \times \frac{1}{6} \quad (3)$$

$$F_i = 2566 \text{ N} \leftarrow \overbrace{\hspace{15em}}^{F_i}$$

Poderíamos ter resolvido este problema considerando as duas distribuições distintas de pressão sobre cada um dos lados da porta, resultando em duas forças resultantes e suas localizações. A soma dos momentos dessas forças sobre o ponto *A* daria o mesmo resultado para a força resultante  $F_i$  (veja Problema 3.59). Note, também, que a Eq. 3 poderia ter sido obtida diretamente (sem determinar separadamente  $F_R$  e  $y'$ ) pelo método de integração direta:

$$\sum M_A = F_i L - \int_A y p dA = 0$$







# Estudo Dirigido

## Forças Hidrostáticas sobre Superfícies Submersas - Superfície Plana

Equações básicas:

$$F_R = \int p \, dA \quad \frac{dp}{dh} = \rho g \quad \sum \vec{M} = 0$$

Somando os momentos em relação ao eixo da articulação, temos

$$\sum M_x = 0 = LF_r - \int z \, dF = 0$$
$$\therefore F_r = \frac{1}{L} \int z \, dF = \frac{1}{L} \int z p \, dA = \frac{1}{L} \int_0^L z p b \, dz$$

De modo a explicitar  $F_r$ , precisamos de  $p$  como função de  $z$ :

$$\frac{dp}{dh} = \rho g = \gamma \quad e \quad dp = \gamma \, dh$$

Então

$$p - p_0 = \int_{p_0}^p dp = \int_0^h \gamma \, dh \quad e \quad p = p_0 + \gamma h$$

Uma vez que a pressão atmosférica atua do lado de fora da porta, a pressão  $p_0$  na expressão acima deve ser a pressão manométrica. Com  $p = p_0 + \gamma h$  e  $h = L - z$ ,

$$F_r = \frac{1}{L} \int_0^L z [p_0 + \gamma(L - z)] b \, dz = \frac{b}{L} \int_0^L p_0 z \, dz + \frac{\gamma b}{L} \int_0^L (Lz - z^2) \, dz$$
$$= \frac{p_0 b z^2}{2L} \Big|_0^L + \frac{\gamma b}{L} \left[ \frac{Lz^2}{2} - \frac{z^3}{3} \right]_0^L$$
$$= \frac{p_0 b L}{2} + \gamma b L^2 \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right] = \frac{p_0 b L}{2} + \frac{\gamma b L^2}{6}$$



# 3.4 Forças Hidrostáticas sobre Superfícies Submersas

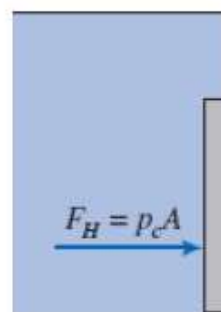
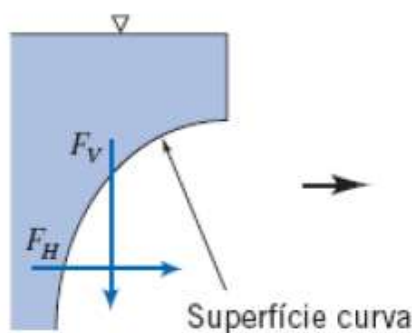
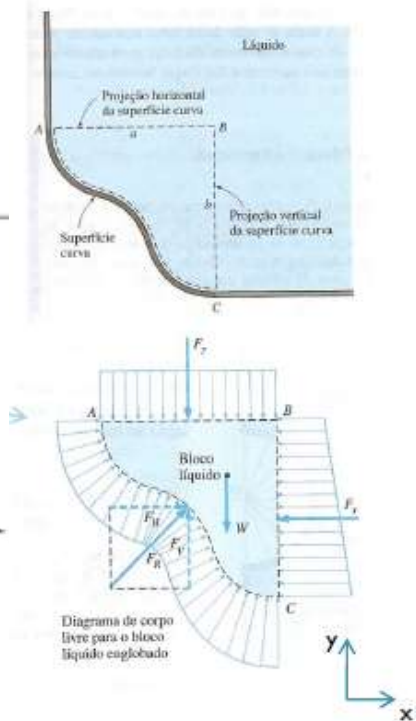
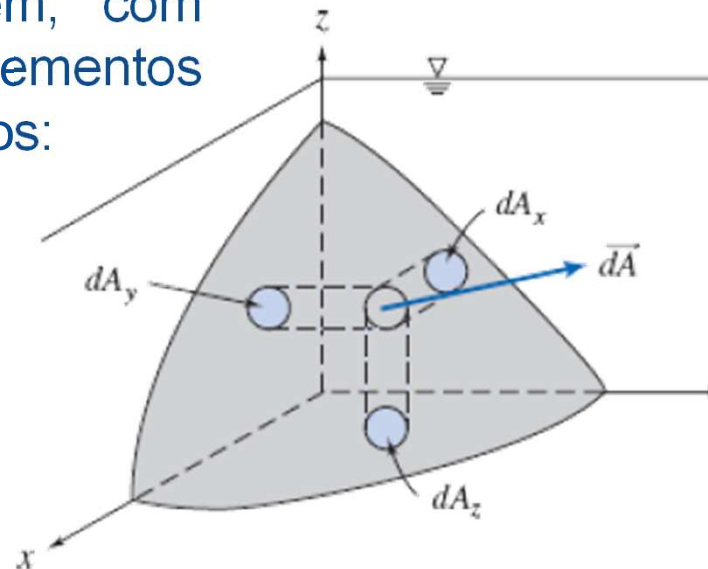
## 3.4.2. Superfície Curva

De modo análogo, porém, com integração em elementos infinitesimais de área, temos:

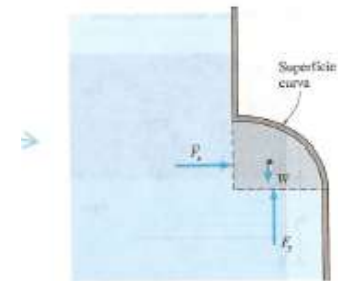
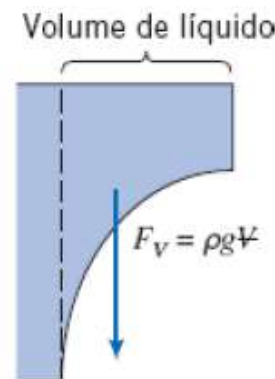
$$F_{R_i} = \int_{A_i} p dA_i$$

$$F_V = \int_{A_z} \rho g h dA_z = \int_V \rho g dV = \rho g V$$

$$F_H = p_c A \quad \text{e} \quad F_V = \rho g V$$



+



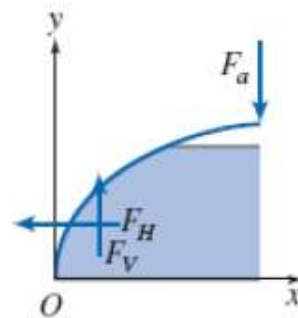
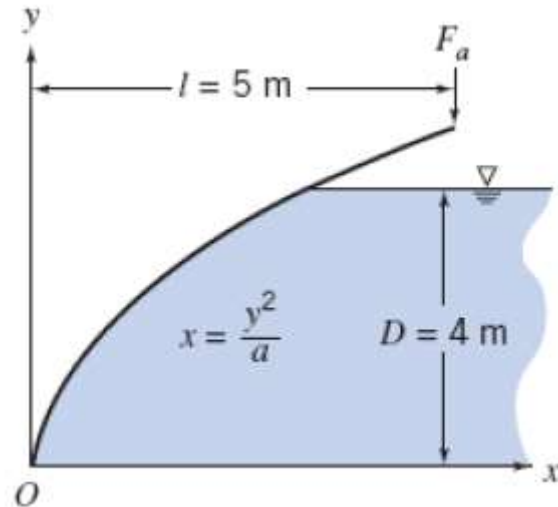
(Cengal e Cimbala, 2007)



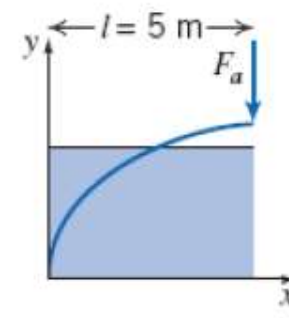
## Exemplo

### Forças Hidrostáticas sobre Superfícies Submersas - Superfície Curva

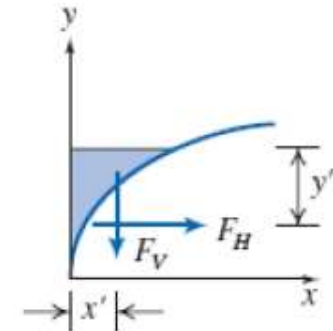
A comporta mostrada é articulada em  $O$  e tem largura constante,  $w = 5$  m. A equação da superfície é  $x = y^2/a$ , com  $a = 4$  m. A profundidade da água à direita da comporta é  $D = 4$  m. Determine o módulo da força,  $F_a$ , aplicada como mostrado, requerida para manter a comporta em equilíbrio se o peso da comporta for desprezado.



(a) Sistema DCL



(b) Forças do fluido nulas



(c) Forças do fluido



## Exemplo

### Forças Hidrostáticas sobre Superfícies Submersas - Superfície Curva

**Equações básicas:**  $F_H = p_c A$     $y' = y_c + \frac{I_{xx}}{Ay_c}$     $F_V = \rho g V$     $x' =$  centro de gravidade da água

Para o cálculo de  $F_H$ , a coordenada  $y$  do centroide, a área e o segundo momento da superfície (placa fina) vertical projetada são, respectivamente,  $y_c = h_c = D/2$ ,  $A = Dw$  e  $I_{xx} = wD^3/12$ .

$$\begin{aligned} F_H &= p_c A = \rho g h_c A \\ &= \rho g \frac{D}{2} Dw = \rho g \frac{D^2}{2} w = 999 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times \frac{(4 \text{ m}^2)}{2} \times 5 \text{ m} \times \frac{\text{N} \cdot \text{s}^2}{\text{kg} \cdot \text{m}} \end{aligned} \quad (1)$$
$$F_H = 392 \text{ kN}$$

e

$$\begin{aligned} y' &= y_c + \frac{I_{xx}}{Ay_c} = \frac{D}{2} + \frac{wD^3/12}{wDD/2} = \frac{D}{2} + \frac{D}{6} \\ y' &= \frac{2}{3}D = \frac{2}{3} \times 4 \text{ m} = 2,67 \text{ m} \end{aligned} \quad (2)$$



## Exemplo

### Forças Hidrostáticas sobre Superfícies Submersas - Superfície Curva

Para  $F_V$ , é necessário calcular o peso da água "acima" da comporta. Para fazer isso, definimos uma coluna de volume diferencial  $(D - y)w dx$  e integramos

$$\begin{aligned} F_V &= \rho g V = \rho g \int_0^{D^{3/2/a}} (D - y)w dx = \rho g w \int_0^{D^{3/2/a}} (D - \sqrt{ax^{1/2}}) dx \\ &= \rho g w \left[ Dx - \frac{2}{3} \sqrt{ax^{3/2}} \right]_0^{D^{3/2/a}} = \rho g w \left[ \frac{D^3}{a} - \frac{2}{3} \sqrt{a} \frac{D^3}{a^{3/2}} \right] = \frac{\rho g w D^3}{3a} \\ F_V &= 999 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 5 \text{ m} \times \frac{(4)^3 \text{ m}^3}{3} \times \frac{1}{4 \text{ m}} \times \frac{\text{N} \cdot \text{s}^2}{\text{kg} \cdot \text{m}} = 261 \text{ kN} \end{aligned} \quad (3)$$



## Exemplo

### Forças Hidrostáticas sobre Superfícies Submersas - Superfície Curva

A localização  $x'$  dessa força é dada pela posição do centro de gravidade da água "acima" da comporta. Da estática, isso pode ser obtido pelo uso do conceito de que o momento de  $F_V$  deve ser igual ao momento da

soma dos pesos diferenciais em torno do eixo  $y$ . Assim,

$$\begin{aligned}x'F_V &= \rho g \int_0^{D^{2/a}} x(D-y)w dx = \rho g w \int_0^{D^{2/a}} (D - \sqrt{ax^{3/2}})dx \\x'F_V &= \rho g w \left[ \frac{D}{2}x^2 - \frac{2}{5}\sqrt{a}x^{5/2} \right]_0^{D^{2/a}} = \rho g w \left[ \frac{D^5}{2a^2} - \frac{2}{5}\sqrt{a}\frac{D^5}{a^{5/2}} \right] = \frac{\rho g w D^5}{10a^2} \\x' &= \frac{\rho g w D^5}{10a^2 F_V} = \frac{3D^2}{10a} = \frac{3}{10} \times \frac{(4)^2 \text{ m}^2}{4 \text{ m}} = 1,2 \text{ m}\end{aligned}\quad (4)$$

Uma vez determinadas as forças do fluido, podemos agora tomar os momentos sobre  $O$  (tendo o cuidado de aplicar os sinais apropriados), usando os resultados da Eqs. (1) a (4)

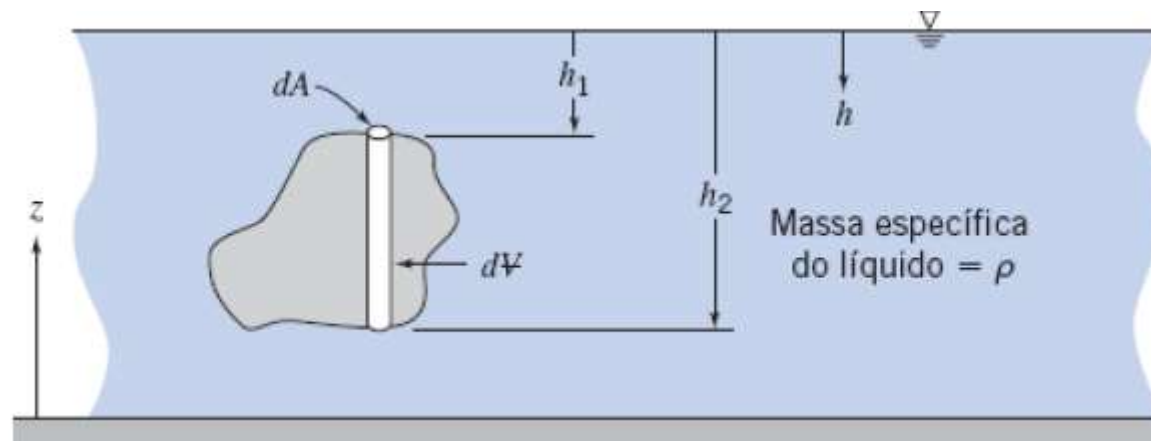
$$\begin{aligned}\sum M_O &= -lF_a + x'F_V + (D-y')F_H = 0 \\F_a &= \frac{1}{l}[x'F_V + (D-y')F_H] \\&= \frac{1}{5 \text{ m}}[1,2 \text{ m} \times 261 \text{ kN} + (4 - 2,67) \text{ m} \times 392 \text{ kN}] \\F_a &= 167 \text{ kN}\end{aligned}$$

## 3.5 Empuxo e Estabilidade

Se um objeto estiver imerso em um líquido, ou flutuando em sua superfície, a força líquida vertical agindo sobre ele devido à pressão do líquido é denominada **empuxo**. Considere um objeto totalmente imerso em um líquido estático, conforme mostrado na Fig.

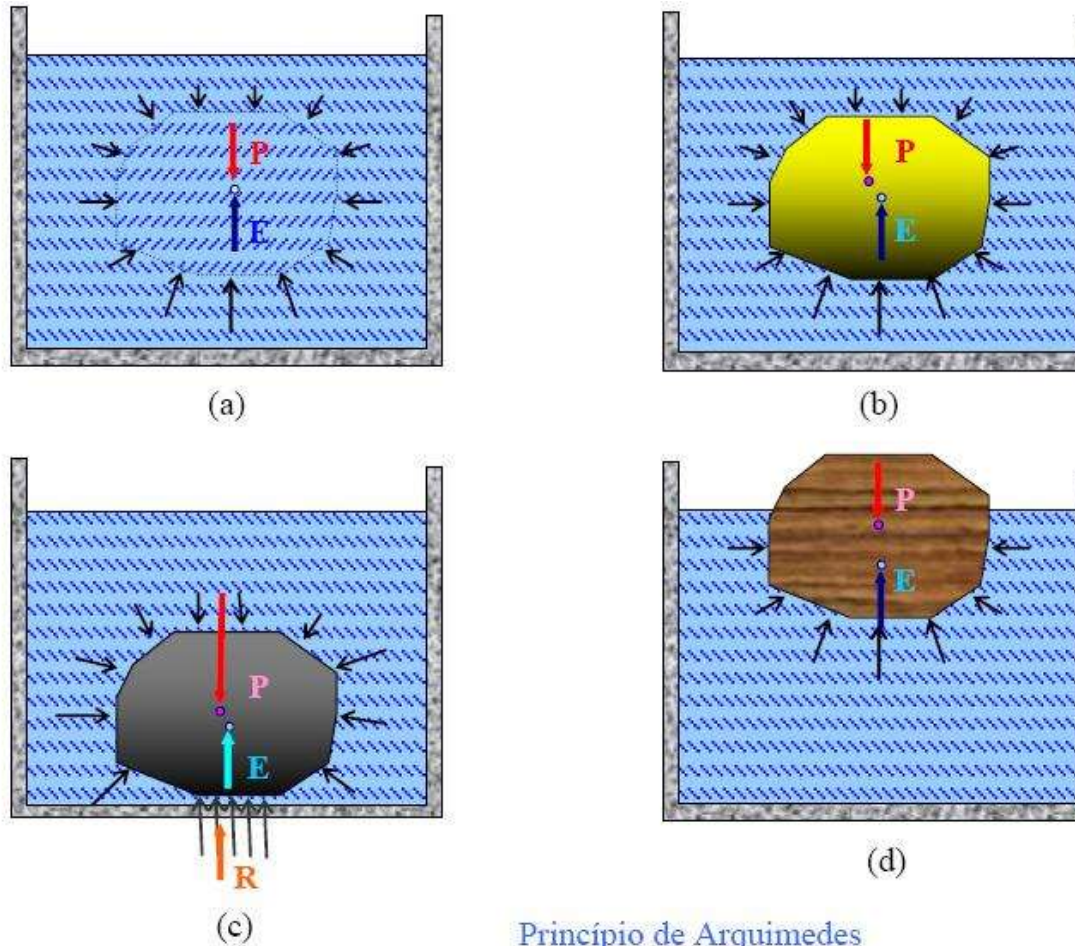
A força vertical sobre o corpo devido à pressão hidrostática pode ser encontrada mais facilmente considerando elementos de volume cilíndricos. Lembremos que é possível calcular a pressão  $p$  em um líquido a uma profundidade  $h$ ,

$$p = p_0 + \rho gh$$



## 3.5 Empuxo e Estabilidade

Pressão Hidrostática.- Princípio de Arquimedes





## 3.5 Empuxo e Estabilidade

A força vertical líquida decorrente da pressão sobre o elemento é então

$$dF_z = (p_0 + \rho gh_2) dA - (p_0 + \rho gh_1) dA = \rho g(h_2 - h_1) dA$$

Porém,  $(h_2 - h_1)dA = dV$ , que é o volume do elemento. Portanto,

$$F_z = \int dF_z = \int_V \rho g dV = \rho gV$$

em que  $V$  é o volume do objeto. Assim, concluímos que, para um corpo submerso, a força de empuxo do fluido é igual ao peso do fluido deslocado,

$$F_{\text{empuxo}} = \rho gV$$

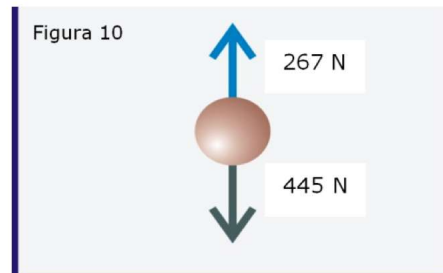


## Exemplo Empuxo

**Exemplo 25** – Um bloco de concreto pesa 445 N no ar e “pesa” apenas 267 N quando imerso em água doce (9 802 N/m<sup>3</sup>). Qual é o peso específico médio do bloco?

$$[\Sigma F_z = 0] 267 + F_E - 445 = 0$$

$$F_E = 178 \text{ N} = (9802)(\text{volume do bloco})$$



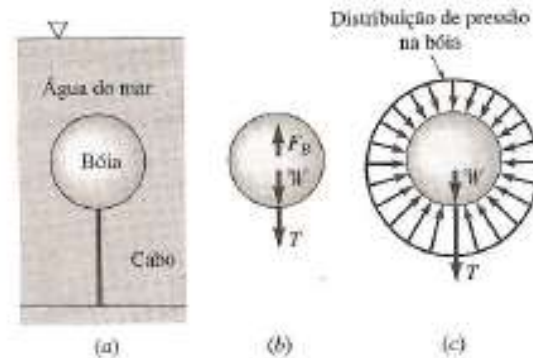
$$\text{volume do bloco} = 0,018 \text{ m}^3$$

$$\gamma_{\text{bloco}} = \frac{445}{0,018} \cong 24\,722 \frac{\text{N}}{\text{m}^3}$$



## Exemplo Empuxo e Estabilidade

Quando um corpo se encontra totalmente submerso em um fluido, ou flutuando parcialmente submerso, a força resultante atuando no corpo é denominada *força de empuxo*, ou *força de flutuação*. Resulta uma força vertical para cima porque a pressão cresce com a profundidade e as forças de pressão atuando de baixo para cima são maiores que as forças de pressão atuando de cima para baixo.



(Fox et al., 2006)

A bóia esférica, com diâmetro de 1,5m e pesando 8,5 kN é ancorada no fundo do mar por um cabo. Para as condições da figura (a), sabendo-se que o peso específico da água do mar é  $\gamma = 10,1 \text{ kN/m}^3$  e que o volume da bóia é dado por  $V = \pi d^3/6 \text{ [m}^3]$ , qual seria a tensão no cabo?



## Exemplo Empuxo e Estabilidade

✓ No diagrama de corpo livre da bóia (b)  $F_B$  é a força de empuxo;  $W$  é o peso da boia e  $T$  é a tensão no cabo.

$$T = F_B - W$$

$$F_B = (10,1 \times 10^3) \left( \frac{\pi}{6} \right) (1,5^3) = 1,785 \times 10^4 \text{ N}$$

A tensão no cabo é então:

$$T = 1,785 \times 10^4 - 8,5 \times 10^3 = 9,35 \text{ kN}$$

O efeito líquido das forças de pressão na superfície da bóia é equivalente à força vertical  $F_B$ . Não se inclui simultaneamente os efeitos da força de empuxo e da pressão hidrostática nos cálculos – se *utiliza uma ou outra*.



## Exemplo Empuxo e Estabilidade

Um balão de ar quente (com a forma aproximada de uma esfera de 15 m de diâmetro) deve levantar um cesto com carga de 2670 N. Até que temperatura o ar deve ser aquecido de modo a possibilitar a decolagem?





## Exemplo Empuxo e Estabilidade

*Equações básicas:*

$$F_{\text{empuxo}} = \rho g \forall \quad \Sigma F_y = 0 \quad p = \rho RT$$

*Considerações:* (1) Gás ideal.

---

(2) A pressão atmosférica age em todos os lados.

Somando as forças verticais, obtemos

$$\Sigma F_y = F_{\text{empuxo}} - W_{\text{ar quente}} - W_{\text{carga}} = \rho_{\text{atm}} g \forall - \rho_{\text{ar quente}} g \forall - W_{\text{carga}} = 0$$

Rearranjando e resolvendo para  $\rho_{\text{ar quente}}$  (usando dados do Apêndice A),

$$\begin{aligned} \rho_{\text{ar quente}} &= \rho_{\text{atm}} - \frac{W_{\text{carga}}}{g \forall} = \rho_{\text{atm}} - \frac{6W_{\text{carga}}}{\pi d^3 g} \\ &= 1,227 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} - 6 \times \frac{2670 \text{ N}}{\pi (15)^3 \text{ m}^3} \times \frac{\text{s}^2}{9,81 \text{ m}} \times \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{N} \cdot \text{s}^2} \\ \rho_{\text{ar quente}} &= (1,227 - 0,154) \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 1,073 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \end{aligned}$$



## Exemplo Empuxo e Estabilidade

Finalmente, para obter a temperatura do ar quente, podemos usar a equação do gás ideal na seguinte forma

$$\frac{p_{\text{ar quente}}}{\rho_{\text{ar quente}} R T_{\text{ar quente}}} = \frac{p_{\text{atm}}}{\rho_{\text{atm}} R T_{\text{atm}}}$$

e com  $p_{\text{ar quente}} = p_{\text{atm}}$

$$T_{\text{ar quente}} = T_{\text{atm}} \frac{\rho_{\text{atm}}}{\rho_{\text{ar quente}}} = (273 + 15)^{\circ}\text{K} \times \frac{1,227}{1,073} = 329^{\circ}\text{K}$$

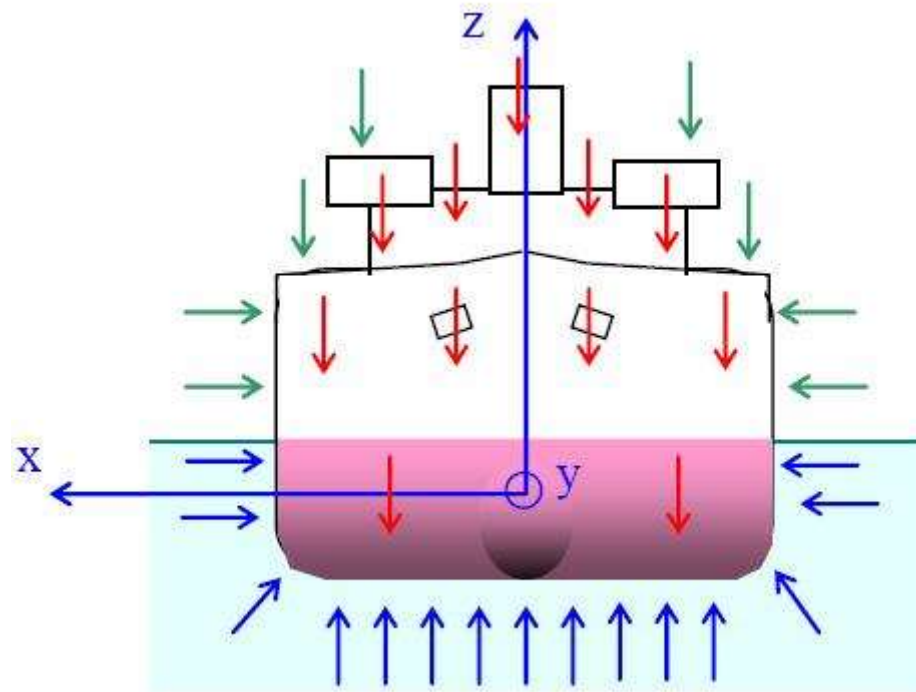
$$T_{\text{ar quente}} = 56^{\circ}\text{C} \leftarrow T_{\text{ar quente}}$$

## 3.5 Empuxo e Estabilidade

### Arquitetura Naval – Estabilidade de Corpos Flutuantes

Pressão Hidrostática.

Atuação da pressão hidrostática no casco do navio

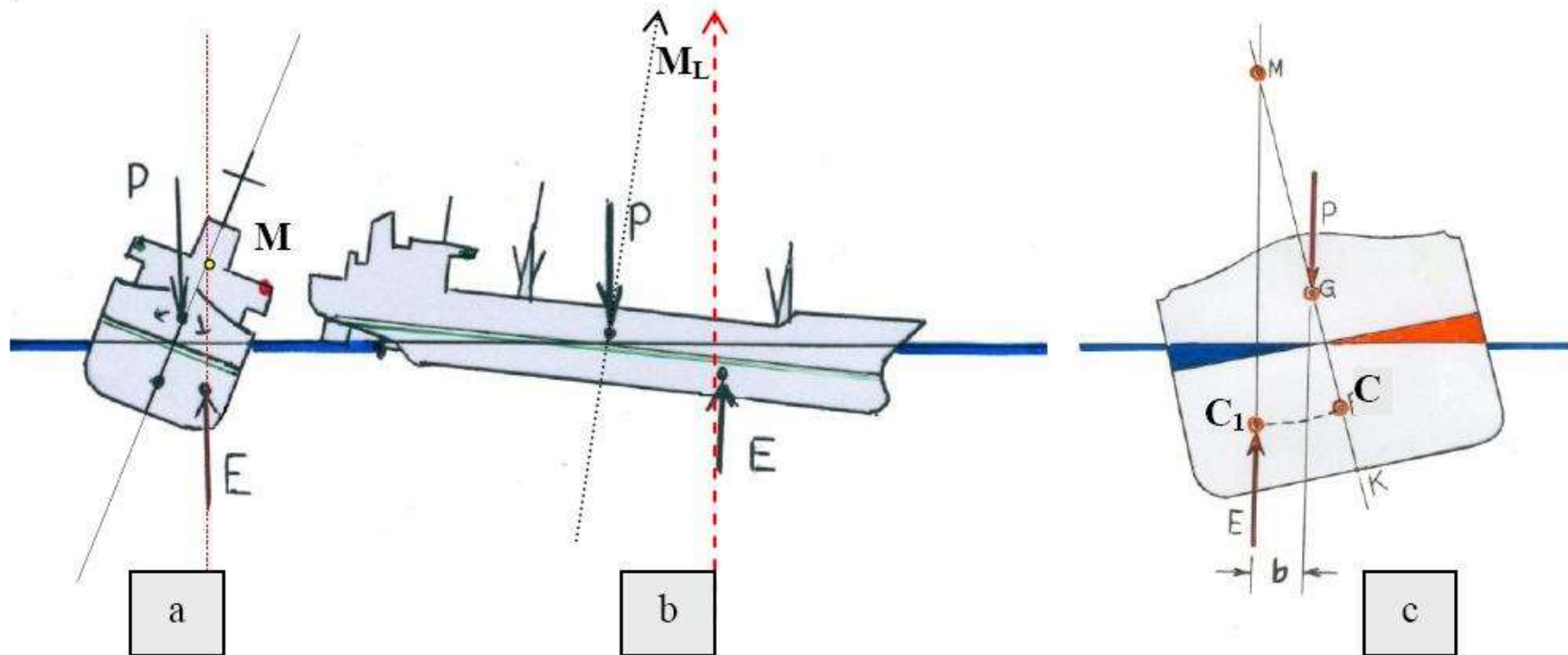




## 3.5 Empuxo e Estabilidade

### Arquitetura Naval – Estabilidade de Corpos Flutuantes

Metacentro:



## 3.5 Empuxo e Estabilidade

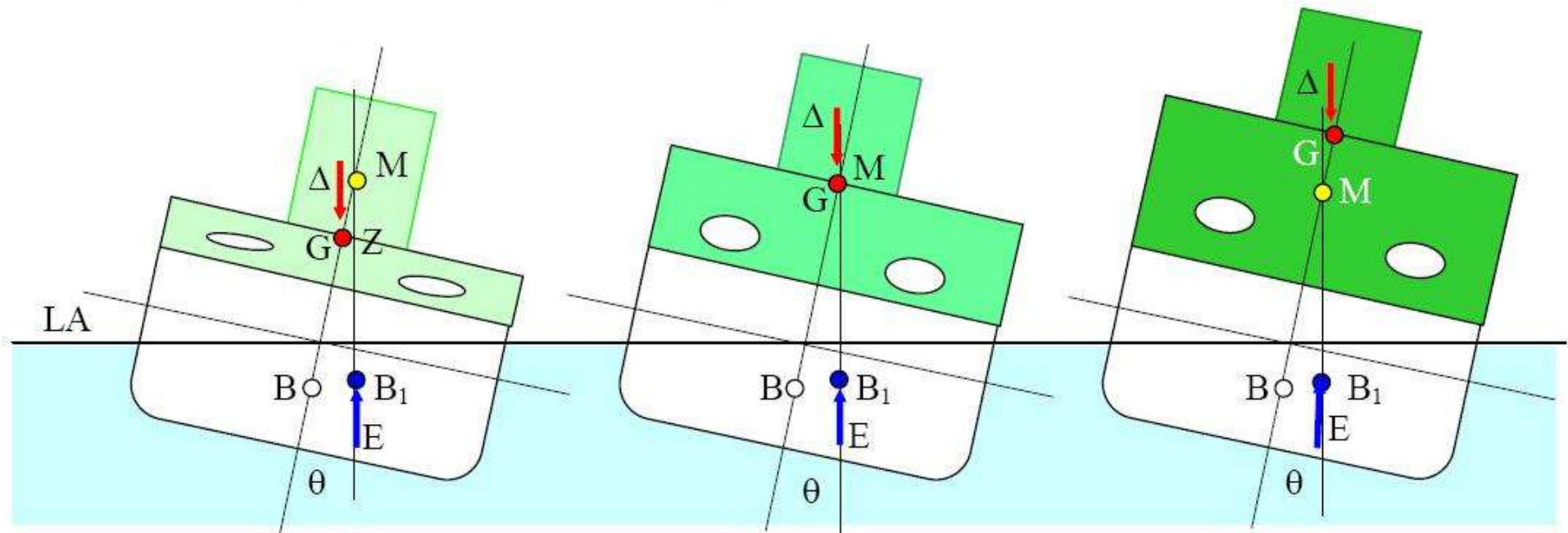
### Arquitetura Naval – Estabilidade de Corpos Flutuantes

Equilíbrio:

Estável

Indiferente

Instável





## Importante! Lista de Exercícios

Como reforço do aprendizado do conteúdo apresentado em sala de aula, são sugeridos os exercícios dispostos na lista abaixo. Bom estudo!

Exercícios Fox - 4ed														
<b>Capítulo 3</b>														
Estática	3.7	3.8	3.12	3.29	3.30	3.31	3.32	3.33	3.34	3.37	3.38	3.41	3.42	3.43
Força Hidrostática sobre superfícies Planas	3.57	3.60	3.61	3.63	3.66	3.68	3.69	3.71	3.75					
Força Hidrostática sobre superfícies Curvas	3.77	3.79	3.80	3.90	3.92	3.95	3.97	3.98	3.102					

Exercícios Fox - 8ed														
<b>Capítulo 3</b>														
Estática			3.6		3.21		3.23				3.29	3.35	3.32	3.33
Força Hidrostática sobre superfícies Planas			3.51	3.66				3.63	3.58					
Força Hidrostática sobre superfícies Curvas	3.72		3.75		3.78	3.79		3.82						

## Capítulo 4 – Equações Básicas, na forma Integral, para um Volume de Controle

- ≡ 4.1 Leis Básicas para um Sistema
- ≡ 4.2 Relação entre as Derivadas do Sistema e a Formulação para VC
- ≡ 4.3 Conservação de Massa
- ≡ 4.4 Equação da Quantidade de Movimento para um VC Inercial
- ≡ \*4.5 *Equação da Quant. de Movimento para um VC com Aceleração Retilínea*
- ≡ \*4.6 *Eq. da Quant. de Mov. para VC com Aceleração Arbitrária*
- ≡ \*4.7 *O Princípio da Quantidade de Movimento Angular*
- ≡ \*4.8 *A Primeira Lei da Termodinâmica*
- ≡ \*4.9 *A Segunda Lei da Termodinâmica*

## 4.1 Leis Básicas para um Sistema

Fluido-dinâmica significa literalmente, “*fluidos em movimento*”. Essa é justamente a abordagem deste capítulo: como examinar um escoamento fluido.

Podemos estudar uma **região do espaço** conforme o fluido escoar através dela, que é a abordagem de **volume de controle** (abordagem *integral*)

Esse é frequentemente o método escolhido, pois ele possui uma grande quantidade de aplicações práticas, com a revisão das leis da física tal como elas se aplicam a um sistema.

- 1. A conservação da massa
- 2. A segunda lei do movimento de Newton
- 3. O princípio da quantidade de movimento angular → MaqFlu
- 4. A primeira lei da termodinâmica → Termo2/Motores
- 5. A segunda lei da termodinâmica → Termo2/Motores

## 4.1 Leis Básicas para um Sistema

### 4.1.1. Conservação da massa

Para um sistema (por definição, uma quantidade de matéria fixa,  $M$ , que escolhemos), temos o resultado simples de que  **$M = \text{constante}$** . Entretanto, como desejamos expressar cada lei física como uma equação de taxa, escrevemos

$$\left. \frac{dM}{dt} \right)_{\text{sistema}} = 0$$

$$M_{\text{sistema}} = \int_{M(\text{sistema})} dm = \int_{\mathcal{V}(\text{sistema})} \rho d\mathcal{V}$$

## 4.1 Leis Básicas para um Sistema

### 4.1.2. Conservação da Quantidade de Movimento

Para um sistema com movimento relativo a um sistema de referência inercial, a **segunda lei de Newton** estabelece que a soma de todas as forças externas agindo sobre o sistema é igual à taxa de variação com o tempo da quantidade de movimento linear do sistema.

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} \Bigg|_{\text{sistema}}$$

em que a quantidade de movimento linear do sistema é dada por

$$\vec{P}_{\text{sistema}} = \int_{M(\text{sistema})} \vec{V} dm = \int_{\forall(\text{sistema})} \vec{V} \rho dV$$

## 4.1 Leis Básicas para um Sistema

### 4.1.3. Conservação do Momento da Quant. de Movimento

O princípio da **quantidade de movimento angular** para um sistema estabelece que a **taxa de variação da quantidade de movimento angular é igual à soma de todos os torques atuando sobre o sistema**

$$\vec{T} = \frac{d\vec{H}}{dt} \Bigg|_{\text{sistema}}$$

em que a quantidade de movimento angular do sistema é dada por

$$\vec{H}_{\text{sistema}} = \int_{M(\text{sistema})} \vec{r} \times \vec{V} dm = \int_{\forall(\text{sistema})} \vec{r} \times \vec{V} \rho dV$$

O **torque** pode ser produzido por **forças de superfície** e de **campo** e também por eixos que cruzam a fronteira do sistema.

$$\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F}_s + \int_{M(\text{sistema})} \vec{r} \times \vec{g} dm + \vec{T}_{\text{eixo}}$$



## 4.2 Relação entre as Derivadas do Sistema e a Formulação para Volume de Controle

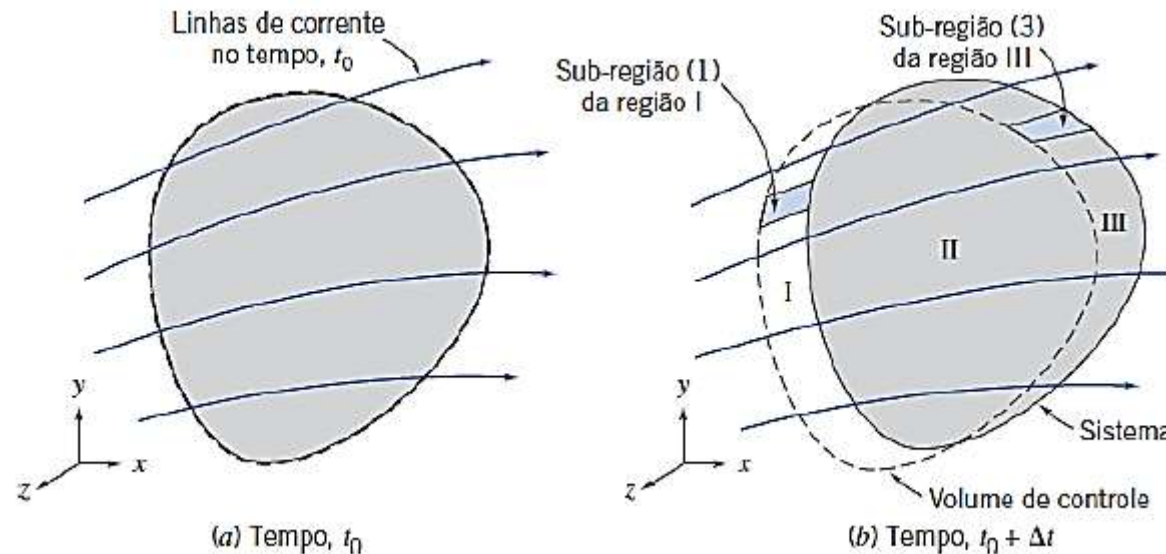
Temos as leis básicas expressas como **equações de taxa** para um sistema. Aqui, desenvolver-se-á uma expressão geral para converter uma equação de taxa para um sistema em uma equação equivalente para um volume de controle.

Em vez de converter as equações para taxas de variação, representamos todas as variáveis pelo símbolo  $N$  (propriedade extensiva) e sua propriedade intensiva correlata (isto é, por unidade de massa)  $\eta$ . Portanto:

$$N_{\text{sistema}} = \int_{M(\text{sistema})} \eta \, dm = \int_{\forall(\text{sistema})} \eta \rho \, dV$$

$$\left\{ \begin{array}{l} N = M, \quad \text{enlão } \eta = 1 \\ N = \vec{P}, \quad \text{enlão } \eta = \vec{V} \\ N = \vec{H}, \quad \text{enlão } \eta = \vec{r} \times \vec{V} \\ N = E, \quad \text{enlão } \eta = e \\ N = S, \quad \text{enlão } \eta = s \end{array} \right.$$

## 4.2 Relação entre as Derivadas do Sistema e a Formulação para Volume de Controle



Da definição de uma derivada, a taxa de variação de  $N_{\text{sistema}}$  é dada por

$$\left( \frac{dN}{dt} \right)_{\text{sistema}} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N_s(t_0 + \Delta t) - N_s(t_0)}{\Delta t}$$

## 4.2 Relação entre as Derivadas do Sistema e a Formulação para Volume de Controle

$$\left(\frac{dN}{dt}\right)_{\text{sistema}} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N_s)_{t_0+\Delta t} - N_s)_{t_0}}{\Delta t}$$

Da geometria tem-se

$$\left. \begin{aligned} N_s)_{t_0+\Delta t} &= (N_{\text{II}} + N_{\text{III}})_{t_0+\Delta t} = (N_{\text{VC}} - N_{\text{I}} + N_{\text{III}})_{t_0+\Delta t} \\ N_s)_{t_0} &= (N_{\text{VC}})_{t_0} \end{aligned} \right\}$$

Substituindo na definição da derivada do sistema

$$\left(\frac{dN}{dt}\right)_s = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(N_{\text{VC}} - N_{\text{I}} + N_{\text{III}})_{t_0+\Delta t} - N_{\text{VC}})_{t_0}}{\Delta t}$$

## 4.2 Relação entre as Derivadas do Sistema e a Formulação para Volume de Controle

Como o limite da soma é igual à soma dos limites, então:

$$\left. \frac{dN}{dt} \right)_s = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N_{\text{VC}})_{t_0+\Delta t} - N_{\text{VC}})_{t_0}}{\Delta t} + \underbrace{\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N_{\text{III}})_{t_0+\Delta t}}{\Delta t} - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N_{\text{I}})_{t_0+\Delta t}}{\Delta t}}_{\text{②} \quad \text{③}}$$

①

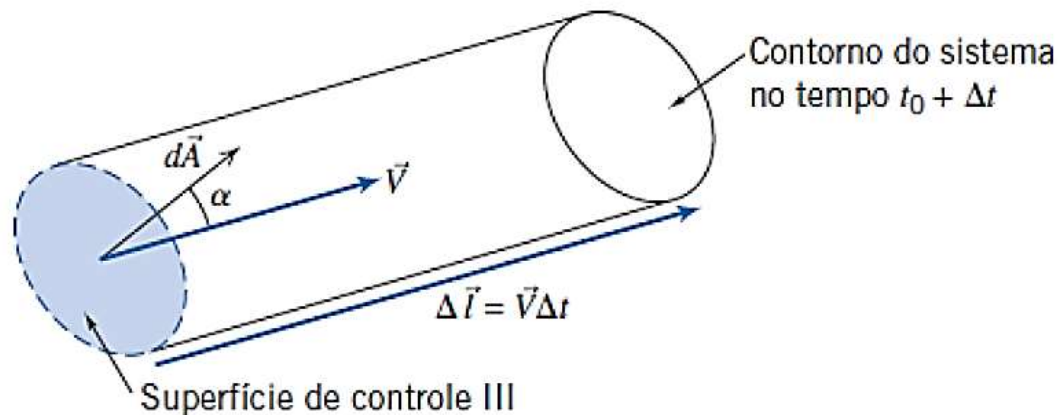
Avaliando cada termo:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N_{\text{VC}})_{t_0+\Delta t} - N_{\text{VC}})_{t_0}}{\Delta t} = \frac{\partial N_{\text{VC}}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{VC}} \eta \rho dV$$

$$N_{\text{sistema}} = \int_{M(\text{sistema})} \eta dm = \int_{V(\text{sistema})} \eta \rho dV$$

## 4.2 Relação entre as Derivadas do Sistema e a Formulação para Volume de Controle

Para avaliar o termo 2, primeiro desenvolveremos uma expressão para  $N_{III}(t_0 + \Delta t)$  examinando a sub-região III (3)



$$dN_{III}(t_0 + \Delta t) = (\eta \rho d\bar{V})_{t_0 + \Delta t}$$

$$d\bar{V} = \Delta l dA \cos \alpha$$

$$\Delta \vec{l} = \vec{V} \Delta t.$$

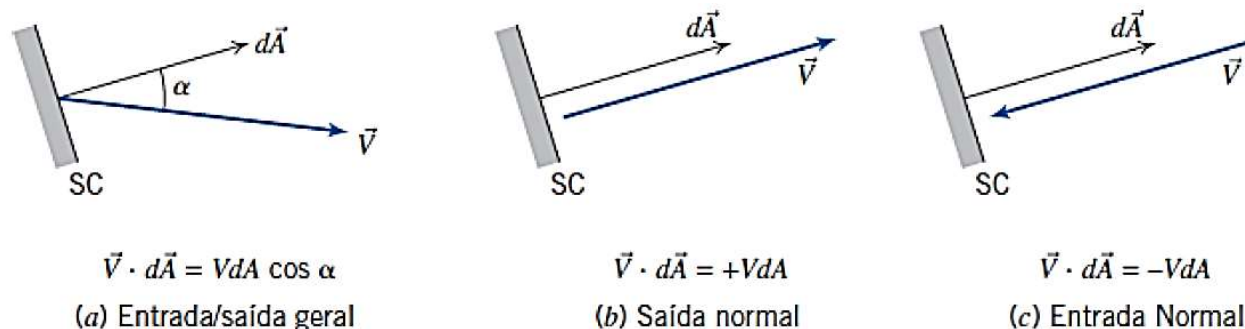
2

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N_{III}(t_0 + \Delta t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{SC_{III}} dN_{III}(t_0 + \Delta t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{SC_{III}} \eta \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \Delta t}{\Delta t} = \int_{SC_{III}} \eta \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

O vetor elemento de área  $dA$  tem o módulo do elemento de área,  $dA$ , da superfície de controle; o sentido de  $dA$  é o da normal à superfície para fora do elemento. O vetor velocidade  $V$  fará um ângulo qualquer  $\alpha$  com relação a  $dA$

## 4.2 Relação entre as Derivadas do Sistema e a Formulação para Volume de Controle

Podemos desenvolver uma análise similar para a sub-região (1), e obter, o termo



$$\textcircled{3} \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N_I)_{t_0 + \Delta t}}{\Delta t} = - \int_{SC_I} \eta \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

$$\left( \frac{dN}{dt} \right)_{\text{sistema}} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \eta \rho dV + \int_{SC_I} \eta \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} + \int_{SC_{III}} \eta \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

e as duas últimas integrais podem ser combinadas porque  $SC_I$  e  $SC_{III}$  constituem a superfície de controle inteira

## 4.2 Relação entre as Derivadas do Sistema e a Formulação para Volume de Controle

Essa é a relação fundamental entre a taxa de variação de qualquer propriedade extensiva arbitrária,  $N$ , de um sistema e as variações dessa propriedade associadas a um volume de controle.

$$\left. \frac{dN}{dt} \right)_{\text{sistema}} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{VC}} \eta \rho dV + \int_{\text{SC}} \eta \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$



Alguns autores referem-se à esta Eq. como o Teorema de **Transporte de Reynolds**

## 4.2 Relação entre as Derivadas do Sistema e a Formulação para Volume de Controle

### Interpretação Física

$$\left. \frac{dN}{dt} \right)_{\text{sistema}} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{VC}} \eta \rho dV + \int_{\text{SC}} \eta \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

Esta é uma fórmula que podemos usar para converter a taxa de variação de qualquer propriedade extensiva,  $N$ , de um sistema para uma formulação equivalente para uso com um volume de controle. Agora podemos as equações das leis físicas fundamentais para cada caso particular.

$$\begin{aligned} N = M, \quad \text{enlão } \eta = 1 \\ N = \vec{P}, \quad \text{enlão } \eta = \vec{V} \\ N = \vec{H}, \quad \text{enlão } \eta = \vec{r} \times \vec{V} \\ N = E, \quad \text{enlão } \eta = e \\ N = S, \quad \text{enlão } \eta = s \end{aligned}$$



## 4.3 Conservação de Massa

$$\text{Se: } \left. \frac{dN}{dt} \right)_{\text{sistema}} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{VC}} \eta \rho d\mathcal{V} + \int_{\text{SC}} \eta \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \quad N = M, \text{ então } \eta = 1$$

$$\left. \frac{dM}{dt} \right)_{\text{sistema}} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{VC}} \rho d\mathcal{V} + \int_{\text{SC}} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

### Casos especiais:

fluidos incompressíveis  $\rho \frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{VC}} d\mathcal{V} + \rho \int_{\text{SC}} \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0 \quad \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} + \int_{\text{SC}} \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0$

volume de controle não deformável  $\int_{\text{SC}} \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0$

velocidade é uniforme  $\sum_{\text{SC}} \vec{V} \cdot \vec{A} = 0 \longrightarrow Q = \int_A \vec{V} \cdot d\vec{A}$

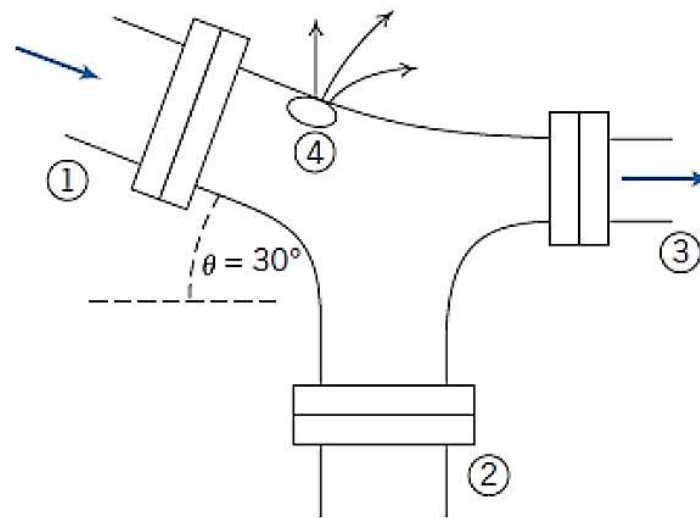
escoamento permanente  $\int_{\text{SC}} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0$



## Caso 1 - O princípio da Conservação de Massa

### Fluxo mássico em um tubo

Considere o escoamento permanente de água em uma junção de tubos conforme mostrado na imagem. As áreas das seções são  $A_1=0,2\text{m}^2$ ,  $A_2=0,2\text{m}^2$  e  $A_3=0,15\text{m}^2$ . O fluido também vaza para fora do tubo através de um orifício em 4 com uma vazão volumétrica estimada em  $0,1\text{m}^3/\text{s}$ . As velocidades médias nas seções 1 e 3 são  $V_1=5\text{m/s}$  e  $V_3=12\text{m/s}$ . Determine a velocidade do escoamento na seção 2.





## Caso 1 - O princípio da Conservação de Massa

### Fluxo mássico em um tubo

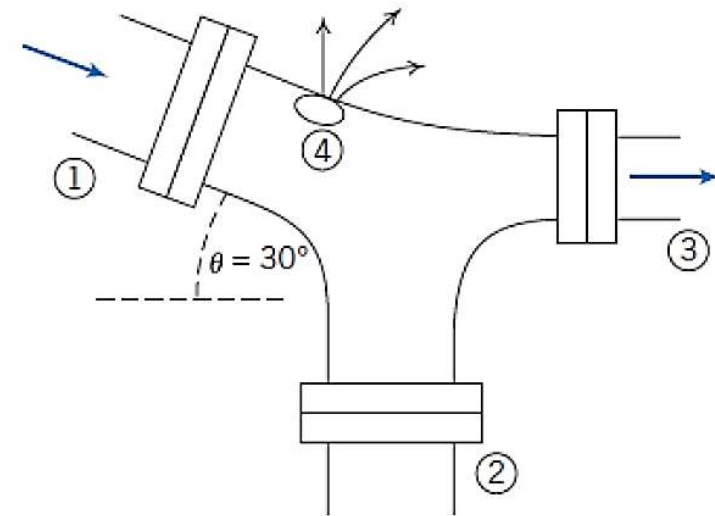
Considerações: Escoamento permanente, incompressível e uniforme

$$\left(\frac{dN}{dt}\right)_{\text{sistema}} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \eta \rho dV + \int_{SC} \eta \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \rightarrow Q = \int_A \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{A}_1 + \vec{V}_2 \cdot \vec{A}_2 + \vec{V}_3 \cdot \vec{A}_3 + Q_4 = 0$$

$$-V_1 A_1 + V_2 A_2 + V_3 A_3 + Q_4 = 0$$

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{V_1 A_1 - V_3 A_3 - Q_4}{A_2} \\ &= \frac{5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \times 0,2 \text{ m}^2 - 12 \frac{\text{m}}{\text{s}} \times 0,15 \text{ m}^2 - \frac{0,1 \text{ m}^3}{\text{s}}}{0,2 \text{ m}^2} \\ &= -4,5 \text{ m/s} \leftarrow V_2 \end{aligned}$$





## Estudo Dirigido

### Atividade em grupo (em sala)

### Exercícios Teóricos

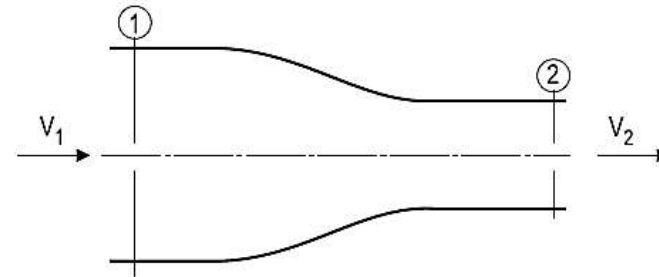
36

Um gás escoar em regime permanente por uma tubulação de diâmetro  $D$  quando passa por uma redução cônica e passa a escoar por uma tubulação de diâmetro  $D/2$ . A densidade do gás na tubulação maior é de  $2 \text{ kg/m}^3$ , enquanto sua velocidade é de  $20 \text{ m/s}$ . Por outro lado, a velocidade do gás após a redução passa a ser de  $16 \text{ m/s}$ .

Para as condições de escoamento estabelecidas, estima-se que a densidade do gás, em  $\text{kg/m}^3$ , na seção menor, vale

- (A) 2
- (B) 4
- (C) 8
- (D) 10
- (E) 16

28



O escoamento de um fluido incompressível passa de uma tubulação de diâmetro  $D$  para outra de diâmetro  $D/2$  através de um bocal, conforme mostrado na figura acima.

Se a vazão na saída é de  $0,01 \text{ m}^3/\text{s}$ , para uma área de saída de  $200 \text{ cm}^2$ , a velocidade na entrada, em  $\text{m/s}$ , é de

- (A) 0,100
- (B) 0,125
- (C) 0,150
- (D) 0,200
- (E) 0,250

PROCESSO SELETIVO (PETROBRAS 2018): ENGENHEIRO(A)  
DE EQUIPAMENTOS JÚNIOR MECÂNICA:

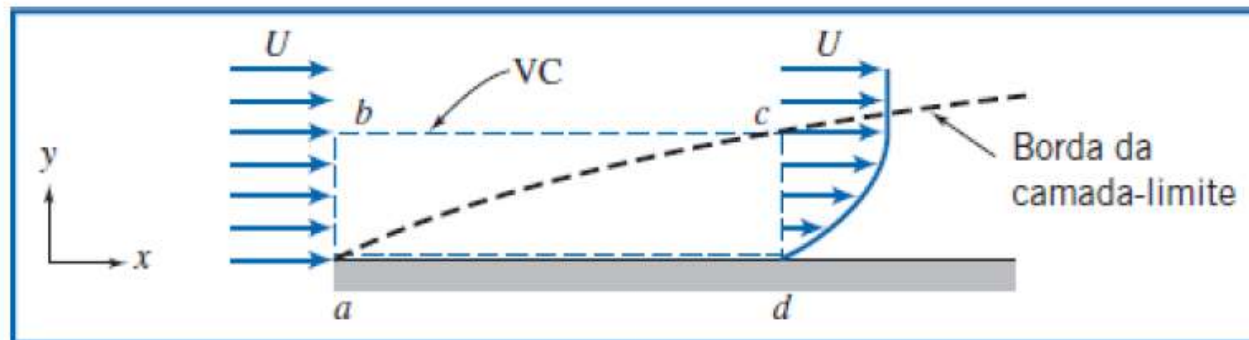
PROCESSO SELETIVO (TRANSPETRO 2012): ENGENHEIRO  
JÚNIOR MECÂNICA



## Caso 2 - O princípio da Conservação de Massa

### Vazão mássica na camada limite

O fluido em contato direto com uma fronteira sólida estacionária tem velocidade zero; não há deslizamento na fronteira. Então, o escoamento sobre uma placa plana adere-se à superfície da placa e forma uma camada-limite, como esquematizado a seguir. O escoamento a montante da placa é uniforme com velocidade  $\vec{v} = U\vec{i}$ ;  $U = 30$  m/s. A distribuição de velocidade dentro da camada-limite ( $0 \leq y \leq \delta$ ) ao longo de  $cd$  é aproximada por  $u/U = 2(y/\delta) - (y/\delta)^2$ .



A espessura da camada-limite na posição  $d$  é  $\delta = 5$  mm. O fluido é ar com massa específica  $\rho = 1,24$  kg/m<sup>3</sup>. Supondo que a largura da placa perpendicular ao papel seja  $w = 0,6$  m, calcule a vazão mássica através da superfície  $bc$  do volume de controle  $abcd$ .



## Caso 2 - O princípio da Conservação de Massa

### Vazão mássica na camada limite

Considerando que não exista escoamento na direção  $z$ , tem-se

$$\left( \begin{array}{c} \text{não existe escoamento} \\ \text{através da} \end{array} \right)$$
$$\int_{A_{ab}} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} + \int_{A_{bc}} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} + \int_{A_{cd}} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} + \int_{A_{da}} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0$$
$$\therefore \dot{m}_{bc} = \int_{A_{bc}} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = - \int_{A_{ab}} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} - \int_{A_{cd}} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \quad (1)$$



## Caso 2 - O princípio da Conservação de Massa

### Vazão mássica na camada limite

$$\int_{A_{ab}} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = - \int_{A_{ab}} \rho u dA = - \int_{y_0}^{y_b} \rho uw dy$$

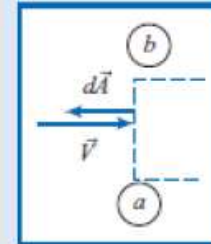
$$= - \int_0^\delta \rho uw dy = - \int_0^\delta \rho U w dy$$

$$\int_{A_{ab}} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = - [\rho U w y]_0^\delta = - \rho U w \delta$$

$$\int_{A_{cd}} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \int_{A_{cd}} \rho u dA = \int_{y_d}^{y_c} \rho uw dy$$

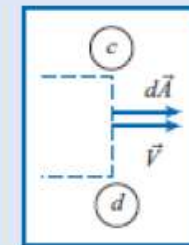
$$= \int_0^\delta \rho uw dy = \int_0^\delta \rho w U \left[ 2 \left( \frac{y}{\delta} \right) - \left( \frac{y}{\delta} \right)^2 \right] dy$$

$$\int_{A_{cd}} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \rho w U \left[ \frac{y^2}{\delta} - \frac{y^3}{3\delta^2} \right]_0^\delta = \rho w U \delta \left[ 1 - \frac{1}{3} \right] = \frac{2\rho U w \delta}{3}$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{V} \cdot d\vec{A} \text{ é negativo} \\ dA = w dy \end{array} \right\}$$

{u = U sobre a área ab}



$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{V} \cdot d\vec{A} \text{ é positivo} \\ dA = w dy \end{array} \right\}$$



## Caso 2 - O princípio da Conservação de Massa

### Vazão mássica na camada limite

Substituindo na Eq. 1, obtivemos

$$\begin{aligned}\therefore \dot{m}_{bc} &= \rho U w \delta - \frac{2\rho U w \delta}{3} = \frac{\rho U w \delta}{3} \\ &= \frac{1}{3} \times 1,24 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 30 \frac{\text{m}}{\text{s}} \times 0,6 \text{ m} \times 5 \text{ mm} \times \frac{\text{m}}{1000 \text{ mm}} \\ \dot{m}_{bc} &= 0,0372 \text{ kg/s} \leftarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Sinal positivo indica escoamento} \\ \text{para fora através da superfície } bc. \end{array} \right\} \dot{m}_b\end{aligned}$$

Este problema demonstra o uso da equação da conservação da massa quando temos escoamento não uniforme em uma seção.





## Caso 3 - O princípio da Conservação de Massa

### Varição de massa específica em tanque

Um tanque, com volume de  $\bar{V} = 0,05 \text{ m}^3$ , contém ar a  $p = 800 \text{ kPa}$  (absoluta) e  $15^\circ\text{C}$ . Em  $t = 0$ , o ar começa a escapar do tanque por meio de uma válvula com área de escoamento de  $65 \text{ mm}^2$ . O ar passando pela válvula tem velocidade de  $300 \text{ m/s}$  e massa específica de  $6 \text{ kg/m}^3$ . Determine a taxa instantânea de variação da massa específica do ar no tanque em  $t = 0$ .

**Dados:** Um tanque de volume  $\bar{V} = 0,05 \text{ m}^3$  contendo ar a  $p = 800 \text{ kPa}$  (absoluta) e  $T = 15^\circ\text{C}$ . Em  $t = 0$ , o ar começa a escapar por uma válvula. O ar sai com velocidade  $V = 300 \text{ m/s}$  e massa específica  $\rho = 6 \text{ kg/m}^3$  por meio de uma área  $A = 65 \text{ mm}^2$ .

**Determinar:** A taxa de variação da massa específica do ar no tanque em  $t = 0$ .

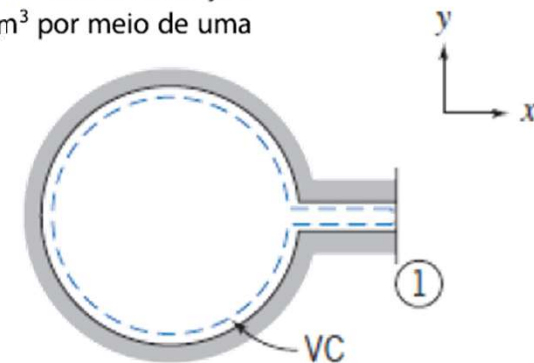
**Solução:** Escolha um volume de controle fixo, conforme mostrado pela linha tracejada.

$$\text{Equação básica: } \frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{VC}} \rho d\bar{V} + \int_{\text{SC}} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0$$

**Considerações:** (1) As propriedades no tanque são uniformes, mas dependentes do tempo.

(2) Escoamento uniforme na seção ①.

Uma vez que as propriedades são consideradas uniformes no tanque em qualquer instante, podemos colocar  $\rho$  para fora da integral do primeiro termo,





## Caso 3 - O princípio da Conservação de Massa

### Varição de massa específica em tanque

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho_{VC} \int_{VC} dV \right] + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0$$

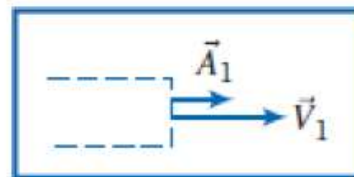
Mas, e então

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho V)_{VC} + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0$$

O único lugar onde massa atravessa a fronteira do volume de controle é na seção ①. Assim,

$$\int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \int_{A_1} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial t} (\rho V) + \int_{A_1} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0$$

Na superfície ①, o sinal de é positivo, de modo que



$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho V) + \int_{A_1} \rho V dA = 0$$



## Caso 3 - O princípio da Conservação de Massa

### Varição de massa específica em tanque

Como o escoamento é considerado uniforme sobre a superfície ①, então

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V) + \rho_1 V_1 A_1 = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial}{\partial t}(\rho V) = -\rho_1 V_1 A_1$$

Uma vez que o volume  $V$ , do tanque não é uma função do tempo,

$$V \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho_1 V_1 A_1$$

e

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\rho_1 V_1 A_1}{V}$$

Em  $t = 0$ ,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -6 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 300 \frac{\text{m}}{\text{s}} \times 65 \text{ mm}^2 \times \frac{1}{0,05 \text{ m}^3} \times \frac{\text{m}^2}{10^6 \text{ mm}^2}$$
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -2,34 \text{ (kg/m}^3\text{)/s} \leftarrow \{ \text{A massa específica é decrescente.} \} \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

## 4.4 Equação da Quantidade de Movimento para um VC Inercial

$$\text{Se: } \left. \frac{dN}{dt} \right)_{\text{sistema}} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{VC}} \eta \rho d\mathcal{V} + \int_{\text{SC}} \eta \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \quad N = \vec{P}, \text{ então } \dot{\eta} = \vec{V}$$

$$\left. \frac{d\vec{P}}{dt} \right)_{\text{sistema}} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{VC}} \vec{V} \rho d\mathcal{V} + \int_{\text{SC}} \vec{V} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

a formulação da segunda lei de Newton para um VC não acelerado

$$F_x = F_{S_x} + F_{B_x} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{VC}} u \rho d\mathcal{V} + \int_{\text{SC}} u \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

$$F_y = F_{S_y} + F_{B_y} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{VC}} v \rho d\mathcal{V} + \int_{\text{SC}} v \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

$$F_z = F_{S_z} + F_{B_z} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{VC}} w \rho d\mathcal{V} + \int_{\text{SC}} w \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$



## Caso 0 - O princípio da Conservação da Quantidade de Movimento

### Força resultante sobre um suporte

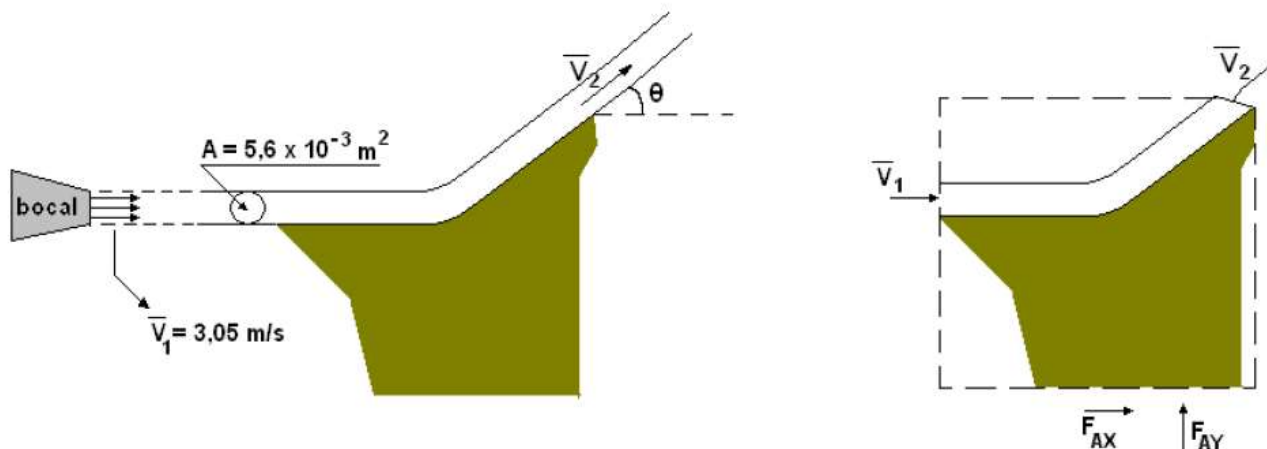
Um jato de água sai de um bocal com velocidade uniforme  $V = 3,05$  m/s, atinge a superfície plana de um defletor e é desviado em um ângulo  $\theta$ . Determine a força de ancoragem necessária para manter o defletor parado, em função de  $\theta$ .

HIPÓTESES:

Regime permanente;

Água é incompressível ( $\rho = 1000$  kg/m<sup>3</sup>);

A pressão é a atmosférica em todo o V.C.





## Caso 0 - O princípio da Conservação da Quantidade de Movimento

### Força resultante sobre um suporte

Para o V.C. do lado direito da figura, as componentes x e y da equação do momento ficam:

$$\sum F_X = \dot{m}(u_2 - u_1) \quad \sum F_Y = \dot{m}(v_2 - v_1)$$

Uma vez que a pressão é a atmosférica em toda a superfície de controle, a força total líquida de pressão é nula. Então o somatório de forças em cada eixo x e y se resume às forças de ancoragem  $F_{AX}$  e  $F_{AY}$ :

$$F_{AX} = \dot{m}(V \cos \theta - V) = -\dot{m}V(1 - \cos \theta)$$

$$F_{AY} = \dot{m}(V \sin \theta - 0) = \dot{m}V \sin \theta$$

Como  $\dot{m} = \rho \cdot A \cdot V$

$$F_{AX} = -\rho A V^2 (1 - \cos \theta)$$

$$F_{AY} = \rho A V^2 \sin \theta$$

Substituindo os valores:

$$F_{AX} = -(1000)(5,6 \times 10^{-3})(3,05^2)(1 - \cos \theta) = -52,1(1 - \cos \theta)[N]$$

$$F_{AY} = 52,1(\sin \theta)[N]$$

O sinal negativo de  $F_{AX}$  indica que a componente horizontal da força de ancoragem é exercida para a esquerda.



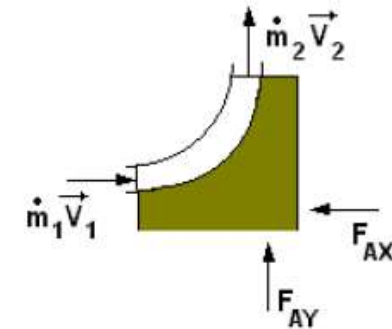
## Caso 0 - O princípio da Conservação da Quantidade de Movimento

### Força resultante sobre um suporte

Se  $\theta = 90^\circ$ , as forças seriam:

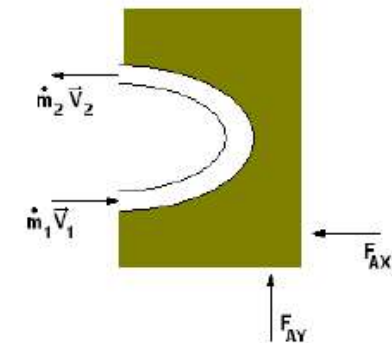
$$F_{AX} = -52,1N \text{ e } F_{AY} = 52,1N$$

Assim, conforme a figura, a força de ancoragem deve se opor ao momento do fluido entrando no V.C. e fornecer o momento de saída.



Já se  $\theta = 180^\circ$ , o jato retorna e as forças serão:

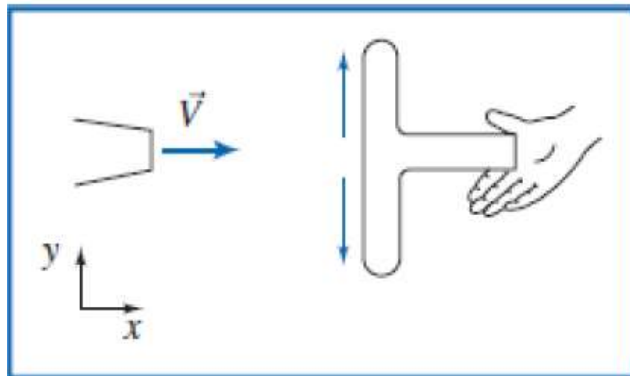
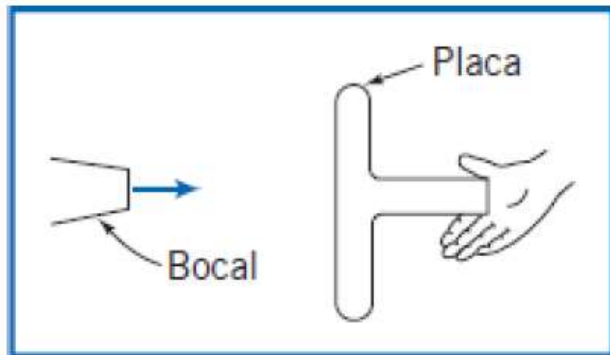
$$F_{AX} = -104,2N \text{ e } F_{AY} = 0$$





## Caso 1 - O princípio da Conservação da Quantidade de Movimento

### Força horizontal sobre um suporte



A água que sai de um bocal estacionário atinge uma placa plana. A velocidade da água ao deixar o bocal é de  $15\text{m/s}$ ; a área deste é de  $0,01\text{m}^2$ . Supondo que a água é dirigida normalmente a placa, e que flui ao longo desta, determine a força horizontal sobre o suporte.





# Caso 1 - O princípio da Conservação da Quantidade de Movimento

## Força horizontal sobre um suporte

$$\vec{F} = \vec{F}_S + \vec{F}_B = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \vec{V} \rho dV + \int_{SC} \vec{V} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0$$

- Considerações:** (1) Escoamento permanente.  
(2) Escoamento incompressível.  
(3) Escoamento uniforme em cada seção onde o fluido cruza as fronteiras do VC.

A despeito da nossa escolha do volume de controle, as considerações (1), (2) e (3) levam a

$$\vec{F} = \vec{F}_S + \vec{F}_B = \sum_{SC} \vec{V} \rho \vec{V} \cdot \vec{A} \quad \text{e} \quad \sum_{SC} \rho \vec{V} \cdot \vec{A} = 0$$

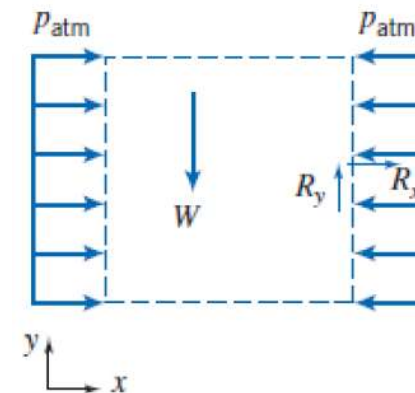
A força de campo no volume de controle é simbolizada por  $W$ .

Como estamos à procura da força horizontal, escrevemos a componente  $x$  da equação da quantidade de movimento para escoamento permanente

$$F_{S_x} + F_{B_x} = \sum_{SC} u \rho \vec{V} \cdot \vec{A}$$

Não há forças de campo na direção  $x$ , logo,  $F_{B_x} = 0$ , e

$$F_{S_x} = \sum_{SC} u \rho \vec{V} \cdot \vec{A}$$





# Caso 1 - O princípio da Conservação da Quantidade de Movimento

## Força horizontal sobre um suporte

Para avaliar  $F_{Sx}$  devemos incluir todas as forças de superfície atuando sobre o volume de controle

$F_{Sx} =$	$p_{atm}A$	-	$p_{atm}A$	+	$R_x$
	força devido a ação da pressão atmosférica para a direita (direção positiva) sobre a superfície esquerda		força devido a ação da pressão atmosférica para a esquerda (direção negativa) sobre a superfície direita		força sobre o suporte sobre o volume de controle (considerada positiva)

Consequentemente,  $F_{Sx} = R_x$  e

$$R_x = \sum_{SC} u \rho \vec{V} \cdot \vec{A} = u \rho \vec{V} \cdot \vec{A}|_1 \quad \{ \text{Para as superfícies horizontais superior e inferior, } u = 0 \}$$

$$R_x = -u_1 \rho V_1 A_1 \quad \{ \text{Em } \textcircled{1}, \rho \vec{V}_1 \cdot \vec{A}_1 = \rho(-V_1 A_1) \text{ visto que } \vec{V}_1 \text{ e } \vec{A}_1 \text{ possuem inclinação de } 180^\circ \text{ um em relação ao outro} \}$$

$$R_x = -15 \frac{\text{m}}{\text{s}} \times 999 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 15 \frac{\text{m}}{\text{s}} \times 0,01 \text{ m}^2 \times \frac{\text{N} \cdot \text{s}^2}{\text{kg} \cdot \text{m}} \quad \{ \text{Note que } u_1 = V_1 \}$$

$$R_x = -2,25 \text{ kN} \quad \{ R_x \text{ age ao contrário do sentido considerado positivo.} \}$$

A força horizontal sobre o suporte é

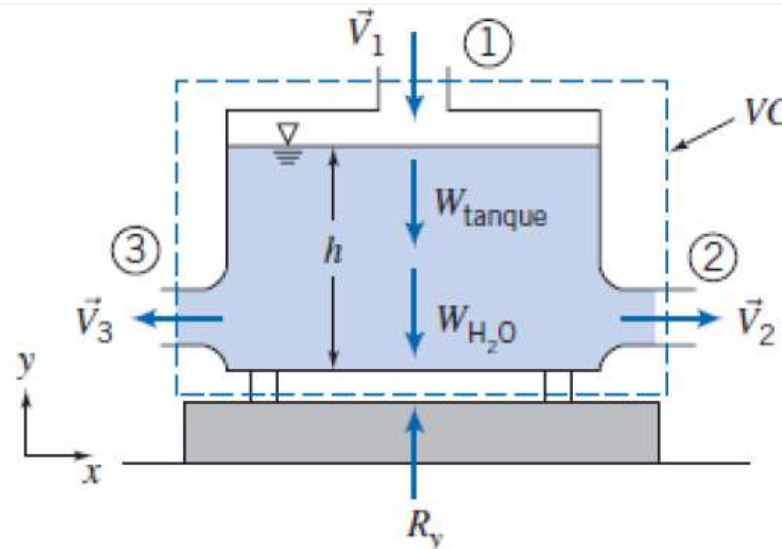
$$K_x = -R_x = 2,25 \text{ kN} \leftarrow \text{a força sobre o suporte age para a direita} \quad K_x$$



## Caso 2 - O princípio da Conservação da Quantidade de Movimento

### Tanque sobre balança: Força de Campo

Um recipiente de metal, com 0,61 m de altura e seção reta interna de 0,09 m<sup>2</sup>, pesa 22,2 N quando vazio. O recipiente é colocado sobre uma balança e a água escoá para o interior do recipiente por uma abertura no topo e para fora por meio de duas aberturas iguais nas laterais do recipiente, conforme mostrado no diagrama. Sob condições de escoamento permanente, a altura da água no tanque é  $h = 0,58$  m.





## Caso 2 - O princípio da Conservação da Quantidade de Movimento

### Tanque sobre balança: Força de Campo

$$\begin{aligned}
 \vec{F}_S + \vec{F}_B &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \vec{V} \rho dV + \int_{SC} \vec{V} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \\
 &= 0(1) \\
 \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} &= 0
 \end{aligned}$$

- Considerações:** (1) Escoamento permanente (dado).  
 (2) Escoamento incompressível.  
 (3) Escoamento uniforme em cada seção onde o fluido cruza as fronteiras do VC.

Nós estamos interessados apenas na componente  $y$  da equação da quantidade de movimento

$$\begin{aligned}
 F_{S_y} + F_{B_y} &= \int_{SC} v \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} & (1) \\
 F_{S_y} &= R_y & \{ \text{Não há força devido à pressão atmosférica.} \} \\
 F_{B_y} &= -W_{\text{tanque}} - W_{\text{H}_2\text{O}} & \{ \text{As duas forças de campo atuam na direção negativa de } y. \} \\
 W_{\text{H}_2\text{O}} &= \rho g V = \gamma A h \\
 \int_{SC} v \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} &= \int_{A_1} v \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \int_{A_1} v (-\rho V_1 dA_1) & \left. \begin{array}{l} \{ \vec{V} \cdot d\vec{A} \text{ é negativo na seção } \textcircled{1} \} \\ \{ v = 0 \text{ nas seções } \textcircled{2} \text{ e } \textcircled{3} \} \end{array} \right\} \\
 &= v_1 (-\rho V_1 A_1) & \left. \begin{array}{l} \{ \text{Consideramos propriedades} \} \\ \{ \text{uniformes na seção } \textcircled{1} \} \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$



## Caso 2 - O princípio da Conservação da Quantidade de Movimento

### Tanque sobre balança: Força de Campo

Usando estes resultados na Eq. 1, resulta

$$R_y - W_{\text{tanque}} - \gamma Ah = v_1(-\rho V_1 A_1)$$

Note que  $v_1$  é a componente  $y$  da velocidade, de modo que  $v = -V_1$ , sendo  $V_1 = 3 \text{ m/s}$ , é o módulo da velocidade. Assim, resolvendo para  $R_y$ ,

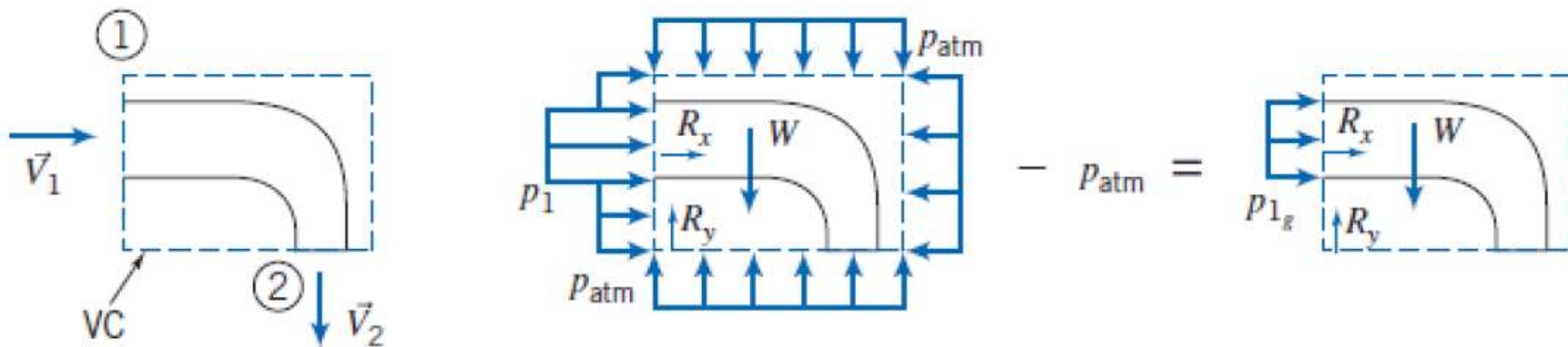
$$\begin{aligned} R_y &= W_{\text{tanque}} + \gamma Ah + \rho V_1^2 A_1 \\ &= 22,2 \text{ N} + 9800 \frac{\text{N}}{\text{m}^3} \times 0,09 \text{ m}^2 \times 0,58 \text{ m} + 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 9 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \times 0,009 \text{ m}^2 \times \frac{\text{N} \cdot \text{s}^2}{\text{kg} \cdot \text{m}} \\ &= 22,2 \text{ N} + 511,6 \text{ N} + 81 \text{ N} \\ R_y &= 614,8 \text{ N} \leftarrow R_y \end{aligned}$$



## Caso 3 - O princípio da Conservação da Quantidade de Movimento

### Escoamento através de um cotovelo

A água escoa em regime permanente através do cotovelo redutor de 90° mostrado no diagrama. Na entrada do cotovelo, a pressão absoluta é 220 kPa e a área da seção transversal é 0,01 m<sup>2</sup>. Na saída, a área da seção transversal é 0,0025 m<sup>2</sup> e a velocidade média é 16 m/s. O cotovelo descarrega para a atmosfera. Determine a força necessária para manter o cotovelo estático.





## Caso 3 - O princípio da Conservação da Quantidade de Movimento

### Escoamento através de um cotovelo

#### Equações básicas:

- Considerações:** (1) Escoamento uniforme em cada seção.  
(2) Pressão atmosférica,  $p_{\text{atm}} = 101 \text{ kPa}$  (abs).  
(3) Escoamento incompressível.  
(4) Escoamento em regime permanente (dado).  
(5) Desprezar o peso do cotovelo e da água no cotovelo.

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \vec{F}_S + \vec{F}_B = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{vc}} \vec{V} \rho \, dV + \int_{\text{sc}} \vec{V} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \\ &= 0(4) \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{vc}} \rho \, dV + \int_{\text{sc}} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{S_x} &= \int_{\text{sc}} u \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \int_{A_1} u \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} & \{F_{B_x} = 0 \text{ e } u_2 = 0\} \\ p_1 A_1 + R_x &= \int_{A_1} u \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} R_x &= -p_1 A_1 + \int_{A_1} u \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \\ &= -p_1 A_1 + u_1 (-\rho V_1 A_1) \\ R_x &= -p_1 A_1 - \rho V_1^2 A_1 \end{aligned}$$



## Caso 3 - O princípio da Conservação da Quantidade de Movimento

### Escoamento através de um cotovelo

Note que  $u_1$  é a componente  $x$  da velocidade, de modo que  $u_1 = V_1$ . Para determinar  $V_1$ , use a equação de conservação da massa:

$$\int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \int_{A_1} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} + \int_{A_2} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0$$
$$\therefore (-\rho V_1 A_1) + (\rho V_2 A_2) = 0$$

e

$$V_1 = V_2 \frac{A_2}{A_1} = 16 \frac{\text{m}}{\text{s}} \times \frac{0,0025}{0,01} = 4 \text{ m/s}$$

Podemos, agora, calcular  $R_x$

$$R_x = -p_{1x} A_1 - \rho V_1^2 A_1$$
$$= -1,19 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \times 0,01 \text{ m}^2 - 999 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 16 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \times 0,01 \text{ m}^2 \times \frac{\text{N} \cdot \text{s}^2}{\text{kg} \cdot \text{m}}$$
$$R_x = -1,35 \text{ kN} \leftarrow R_x$$





## Caso 3 - O princípio da Conservação da Quantidade de Movimento

### Escoamento através de um cotovelo

Escrevendo a componente  $y$  da equação da quantidade de movimento, obtém-se

$$F_{S_y} + F_{B_y} = R_y + F_{B_y} = \int_{SC} v \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \int_{A_2} v \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \quad \{v_1 = 0\}$$

ou

$$\begin{aligned} R_y &= -F_{B_y} + \int_{A_2} v \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \\ &= -F_{B_y} + v_2(\rho V_2 A_2) \\ R_y &= -F_{B_y} - \rho V_2^2 A_2 \end{aligned}$$

Note que  $v_2$  é a componente  $y$  da velocidade, de modo que  $v_2 = -V_2$ , sendo  $V_2$  o módulo da velocidade de saída.

Substituindo os valores conhecidos

$$\begin{aligned} R_y &= -F_{B_y} + -\rho V_2^2 A_2 \\ &= -F_{B_y} - 999 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times (16)^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \times 0,0025 \text{ m}^2 \times \frac{\text{N} \cdot \text{s}^2}{\text{kg} \cdot \text{m}} \\ &= -F_{B_y} - 639 \text{ N} \leftarrow R_y \end{aligned}$$

Desprezando  $F_{B_y}$ , resulta

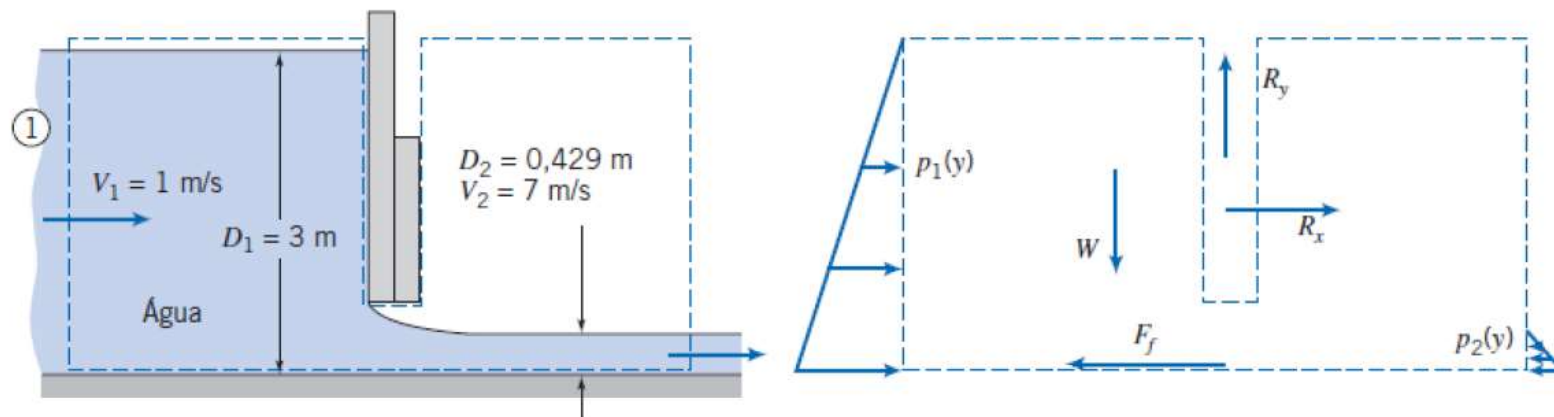
$$R_y = -639 \text{ N} \leftarrow R_y$$



## Caso 4 - O princípio da Conservação da Quantidade de Movimento

### Força sobre uma comporta

A água num bocal aberto escoava sob uma comporta. O escoamento é incompressível e uniforme nas seções 1 e 2. Podem-se admitir distribuições de pressão hidrostática nas seções 1 e 2 porque as linhas de corrente do escoamento são ali, essencialmente retilíneas. Determine a magnitude e o sentido da força, por unidade de largura, exercida sobre a comporta pelo escoamento.





## Caso 4 - O princípio da Conservação da Quantidade de Movimento

### Força sobre uma comporta

$$= 0(2) = 0(3)$$
$$F_{S_x} + F_{f_x} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} u \rho dV + \int_{SC} u \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

- Considerações:** (1)  $F_f$  desprezível (despreze o atrito no fundo do canal).  
(2)  $F_{B_x} = 0$ .  
(3) Escoamento em regime permanente.  
(4) Escoamento incompressível (dado).  
(5) Escoamento uniforme em cada seção (dado).  
(6) Distribuições de pressão hidrostática em e (dado).

Então,

$$F_{S_x} = F_{R_1} + F_{R_2} + R_x = u_1(-\rho V_1 w D_1) + u_2(\rho V_2 w D_2)$$

As forças de superfície atuando sobre o VC são decorrentes das distribuições de pressão e da força desconhecida  $R_x$ . Da consideração (6), podemos integrar as distribuições de pressões manométricas sobre cada lado para calcular as forças hidrostáticas  $F_{R_1}$  e  $F_{R_2}$ ,

$$F_{R_1} = \int_0^{D_1} p_1 dA = w \int_0^{D_1} \rho g y dy = \rho g w \frac{y^2}{2} \Big|_0^{D_1} = \frac{1}{2} \rho g w D_1^2$$

em que  $y$  é medido para baixo a partir da superfície livre na seção ①, e



## Caso 4 - O princípio da Conservação da Quantidade de Movimento

### Força sobre uma comporta

$$F_{R_2} = \int_0^{D_2} p_2 dA = w \int_0^{D_2} \rho g y dy = \rho g w \frac{y^2}{2} \Big|_0^{D_2} = \frac{1}{2} \rho g w D_2^2$$

em que  $y$  é medido para baixo a partir da superfície livre na seção ②. (Note que poderíamos ter usado a equação de força hidrostática, Eq. 3.10b, diretamente para obter essas forças.)

Avaliando  $F_{S_x}$  resulta

$$F_{S_x} = R_x + \frac{\rho g w}{2} (D_1^2 - D_2^2)$$

Substituindo na equação da quantidade de movimento, com  $u_1 = V_1$  e  $u_2 = V_2$ , obtivemos

$$R_x + \frac{\rho g w}{2} (D_1^2 - D_2^2) = -\rho V_1^2 w D_1 + \rho V_2^2 w D_2$$

ou

$$R_x = \rho w (V_2^2 D_2 - V_1^2 D_1) - \frac{\rho g w}{2} (D_1^2 - D_2^2)$$



## Caso 4 - O princípio da Conservação da Quantidade de Movimento

### Força sobre uma comporta

$$\begin{aligned}\frac{R_x}{w} &= \rho(V_2^2 D_2 - V_1^2 D_1) - \frac{\rho g}{2}(D_1^2 - D_2^2) \\ &= 999 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times [(7)^2(0,429) - (1)^2(3)] \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \text{m} \times \frac{\text{N} \cdot \text{s}^2}{\text{kg} \cdot \text{m}} \\ &\quad - \frac{1}{2} \times 999 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times [(3)^2 - (0,429)^2] \text{m}^2 \times \frac{\text{N} \cdot \text{s}^2}{\text{kg} \cdot \text{m}} \\ \frac{R_x}{w} &= 18,0 \text{ kN/m} - 43,2 \text{ kN/m} \\ \frac{R_x}{w} &= -25,2 \text{ kN/m}\end{aligned}$$

$R_x$  é a força externa atuando sobre o volume de controle, aplicada pela comporta. Portanto, a força de todos os fluidos sobre a comporta é  $K_x$ , na qual  $K_x = -R_x$ . Então,

$$\frac{K_x}{w} = -\frac{R_x}{w} = 25,2 \text{ kN/m} \longleftarrow \frac{K_x}{w}$$

Esta força pode ser comparada com a força sobre a comporta fechada de 44,1 kN/m (que é obtida a partir do segundo termo à direita da equação de cálculo de  $R_x/w$  fazendo  $D_2$  igual a zero, porque, para a comporta fechada, não há fluido no lado direito) – a força sobre a comporta aberta é significativamente menor quando a água é acelerada para fora sob a comporta.

## 4.4 Equação da Quant. de Mov. para um VC Inercial

### 4.4.1 Análise para um VC Diferencial \*\*

Se aplicarmos a metodologia a um volume de controle diferencial, podemos obter **equações diferenciais** descrevendo um campo de escoamento. Nesta seção aplicaremos as **equações da conservação da massa e da quantidade de movimento** a um volume de controle diferencial para obter uma equação diferencial simples descrevendo um escoamento incompressível, sem atrito e em regime permanente, e integrá-la ao longo de uma linha de corrente para deduzir a famosa **equação de Bernoulli**.

#### a. Equação da Continuidade

$$\text{Equação básica: } \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0 \quad (4.12)$$

- Considerações: (1) Escoamento em regime permanente.  
(2) Não há escoamento através das linhas de corrente limitadoras do VC.  
(3) Escoamento incompressível,  $\rho = \text{constante}$ .

#### b. Componente da Equação da Quantidade de Movimento na Direção da Linha de Corrente

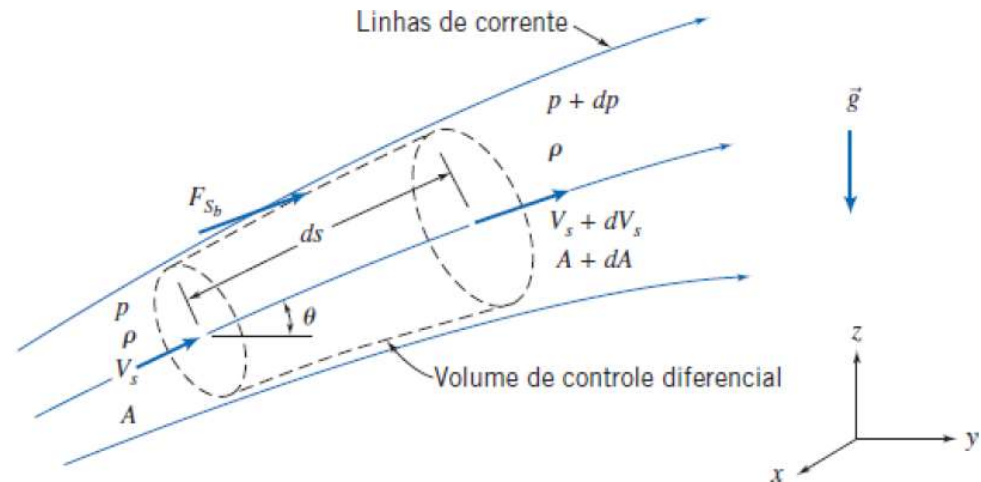
$$\text{Equação básica: } F_{S_s} + F_{B_s} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} u_x \rho dV + \int_{SC} u_x \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \quad (4.20)$$

- Consideração: (4) Não existe atrito, portanto  $F_{S_b}$  é decorrente somente das forças de pressão.

## 4.4 Equação da Quant. de Mov. para um VC Inercial

### 4.4.1 Análise para um VC Diferencial \*\*

a) Conservação da massa



Então,

$$(-\rho V_s A) + \{\rho(V_s + dV_s)(A + dA)\} = 0$$

então,

$$\rho(V_s + dV_s)(A + dA) = \rho V_s A$$

Expandindo o lado esquerdo e simplificando, obtivemos

$$V_s dA + A dV_s + dA dV_s = 0$$

Mas  $dA dV_s$  é um produto de diferenciais que pode ser desprezado, comparado com  $V_s dA$  ou  $A dV_s$ . Assim

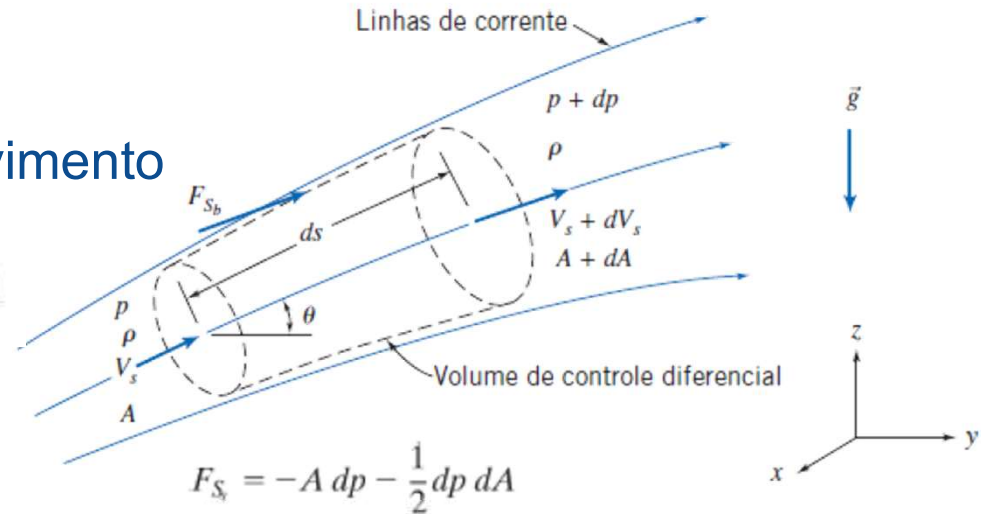
$$V_s dA + A dV_s = 0$$

## 4.4 Equação da Quant. de Mov. para um VC Inercial

### 4.4.1 Análise para um VC Diferencial \*\*

a) Conservação da Quant. Movimento

$$F_{S_s} = pA - (p + dp)(A + dA) + \left(p + \frac{dp}{2}\right)dA$$



$$F_{S_s} = -A dp - \frac{1}{2} dp dA$$

A componente da força de campo na direção  $s$  é

$$F_{B_s} = \rho g_s dV = \rho(-g \sin \theta) \left(A + \frac{dA}{2}\right) ds$$

Mas  $\sin \theta ds = dz$ , de modo que

$$F_{B_s} = -\rho g \left(A + \frac{dA}{2}\right) dz$$

O fluxo de quantidade de movimento será

$$\int_{SC} u_s \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = V_s(-\rho V_s A) + (V_s + dV_s) \{ \rho (V_s + dV_s) (A + dA) \}$$



## 4.4 Equação da Quant. de Mov. para um VC Inercial

### 4.4.1 Análise para um VC Diferencial \*\*

uma vez que não há fluxo de massa através das superfícies do tubo de corrente. De acordo com a equação da continuidade, Eq. 4.19a, os fatores de fluxo de massas entre parênteses e chaves são iguais, de modo que

$$\int_{SC} u_s \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = V_s(-\rho V_s A) + (V_s + dV_s)(\rho V_s A) = \rho V_s A dV_s \quad (4.22)$$

Substituindo as Eqs. 4.21b, 4.21c e 4.22 na Eq. 4.20 (a equação da quantidade de movimento), resulta

$$-A dp - \frac{1}{2} dp dA - \rho g A dz - \frac{1}{2} \rho g dA dz = \rho V_s A dV_s$$

Dividindo por  $\rho A$  e observando que os termos com produtos de diferenciais são desprezíveis em relação aos demais, obtivemos

$$-\frac{dp}{\rho} - g dz = V_s dV_s = d\left(\frac{V_s^2}{2}\right)$$

ou

$$\frac{dp}{\rho} + d\left(\frac{V_s^2}{2}\right) + g dz = 0$$

$$\frac{p}{\rho} + \frac{V_s^2}{2} + gz = \text{constante}$$

Esta equação está sujeita às seguintes restrições:

1. Escoamento em regime permanente.
2. Ausência de atrito.
3. Escoamento ao longo de uma linha de corrente.
4. Escoamento incompressível.

## 4.4 Equação da Quant. de Mov. para um VC Inercial

### 4.4.1 Análise para um VC Diferencial \*\*

A **equação de Bernoulli** somente pode ser usada quando as quatro restrições listadas anteriormente forem aplicadas, para obter pelo menos uma precisão razoável! Embora nenhum escoamento real satisfaça todas estas restrições (especialmente a segunda), nós podemos aproximar o comportamento de muitos escoamentos com esta Eq.

$$\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = \text{constante}$$

Esta equação está sujeita às seguintes restrições:

1. Escoamento em regime permanente.
2. Ausência de atrito.
3. Escoamento ao longo de uma linha de corrente.
4. Escoamento incompressível.

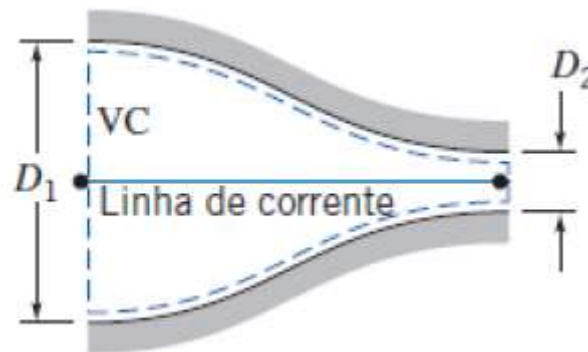


Deduzimos uma forma da equação, talvez uma das mais famosas (e mal empregada) em mecânica dos fluidos básica, a **Equação de Bernoulli**



## Escoamento em Bocal com a aplicação da Equação de Bernoulli

A água escoá, em regime permanente, através de um bocal horizontal que descarrega para a atmosfera. Na entrada, o diâmetro do bocal é  $D_1$  e na saída,  $D_2$ . Deduza uma expressão para a pressão manométrica mínima necessária na entrada do bocal para produzir uma vazão volumétrica dada,  $Q$ . Avalie a pressão manométrica para  $D_1=75\text{mm}$  e  $D_2=25\text{mm}$ , quando a vazão volumétrica desejada for  $0,02\text{m}^3/\text{s}$





## Escoamento em Bocal com a aplicação da Equação de Bernoulli

**Solução:**

*Equações básicas:*

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2$$
$$= 0(1)$$
$$\frac{d}{dt} \int_{vc} \rho dV + \int_{sc} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0$$

- Considerações:** (1) Escoamento permanente (dado).  
(2) Escoamento incompressível.  
(3) Escoamento sem atrito.  
(4) Escoamento ao longo de uma linha de corrente.  
(5)  $z_1 = z_2$ .  
(6) Escoamento uniforme nas seções ① e ②.

Para avaliar  $p_1$ , devemos aplicar a equação de Bernoulli ao longo de uma linha de corrente, entre os pontos ① e ②. Então,



## Escoamento em Bocal com a aplicação da Equação de Bernoulli

$$p_{1g} = p_1 - p_{\text{atm}} = p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2}(V_2^2 - V_1^2) = \frac{\rho}{2}V_1^2 \left[ \left( \frac{V_2}{V_1} \right)^2 - 1 \right]$$

A aplicação da equação da continuidade resulta em

$$(-\rho V_1 A_1) + (\rho V_2 A_2) = 0 \text{ ou } V_1 A_1 = V_2 A_2 = Q$$

de modo que

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{A_1}{A_2} \quad \text{e} \quad V_1 = \frac{Q}{A_1}$$

Então,

$$p_{1g} = \frac{\rho Q^2}{2A_1^2} \left[ \left( \frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 1 \right]$$

Como  $A = \pi D^2/4$ , resulta

$$p_{1g} = \frac{8\rho Q^2}{\pi^2 D_1^4} \left[ \left( \frac{D_1}{D_2} \right)^4 - 1 \right] \longleftarrow p_{1g}$$



## Escoamento em Bocal com a aplicação da Equação de Bernoulli

(Note que, para um dado bocal, a pressão requerida é proporcional ao quadrado da vazão – isto não é surpresa, pois usamos a Eq. 4.24 que mostra que  $p \sim V^2 \sim Q^2$ .) Com  $D_1 = 75$  mm,  $D_2 = 25$  mm, e  $\rho = 1000$  kg/m<sup>3</sup>,

$$p_{1g} = \frac{8}{\pi^2} \times 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times \frac{1}{(0,075)^4 \text{m}^4} \times Q^2 [(3,0)^4 - 1] \frac{\text{N} \cdot \text{s}^2}{\text{kg} \cdot \text{m}} \times \frac{\text{Pa} \cdot \text{m}^2}{\text{N}^2}$$

$$p_{1g} = 2049,44 \times 10^6 Q^2 \frac{\text{N} \cdot \text{s}^2}{\text{m}^8} \times \frac{\text{Pa} \cdot \text{m}^2}{\text{N}}$$

Com  $Q = 0,02$  m<sup>3</sup>/s, então  $p_{1g} = 819.776$  kPa ←  $p_{1e}$



## Caso 4 – Cálculo das forças de ancoragem

A água ( $\rho=1000\text{kg/m}^3$ ) escoia, em regime permanente, através de um bocal horizontal que descarrega para a atmosfera. Na entrada, o diâmetro do bocal é  $D_1$  (100mm) e na saída,  $D_2$  (25mm). A vazão volumétrica,  $Q$ , é  $0,005\text{m}^3/\text{s}$ . O jato sai do bocal com velocidade  $V_1$  e atinge um defletor e é desviado em um ângulo  $\theta$  e sai com velocidade  $V_2$ .

Determine:

- A velocidade de saída do bocal  $V_1$  (m/s) utilizando o conceito da conservação da massa (Eq. Continuidade);
- A velocidade de saída do defletor  $V_2$  (m/s) utilizando o conceito da conservação da massa (Eq. Continuidade);
- A pressão manométrica  $p_{g(\text{bocal})}$  (kPa) para o bocal utilizando a Equação de Bernoulli
- A componente horizontal da força de ancoragem,  $R_{BX}$  (N), necessária para manter o bocal estático (considere a conservação da quantidade de movimento)



## Caso 4 – Cálculo das forças de ancoragem

Determine:

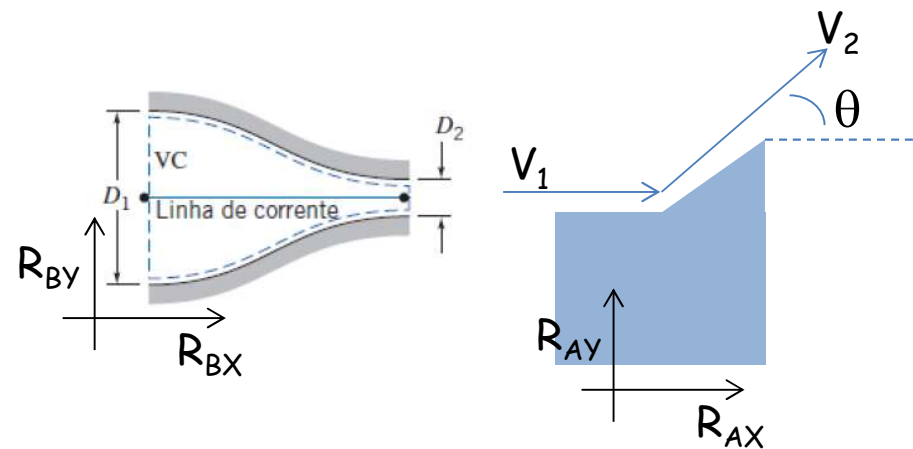
- e) A componente vertical da força de ancoragem,  $R_{AY}$  (N), necessária para manter o bocal estático (considere a conservação da quantidade de movimento e despreze o peso do fluido no interior do bocal)
- f) A componente horizontal da força de ancoragem,  $R_{AX}$  (N), necessária para manter o defletor estático (considere  $\theta$  e considere a conservação da quantidade de movimento)
- g) A componente vertical da força de ancoragem,  $R_{AY}$  (N), necessária para manter o defletor estático (considere  $\theta$  considere a conservação da quantidade de movimento)





## Caso 4 – Cálculo das forças de ancoragem

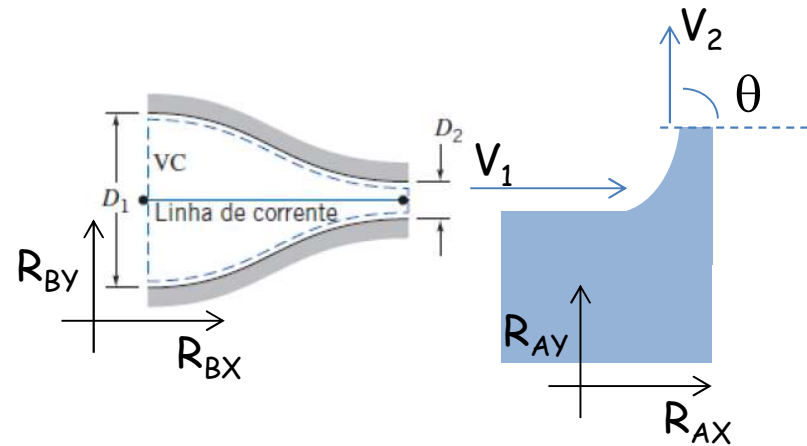
Determine:





## Caso 4 – Cálculo das forças de ancoragem

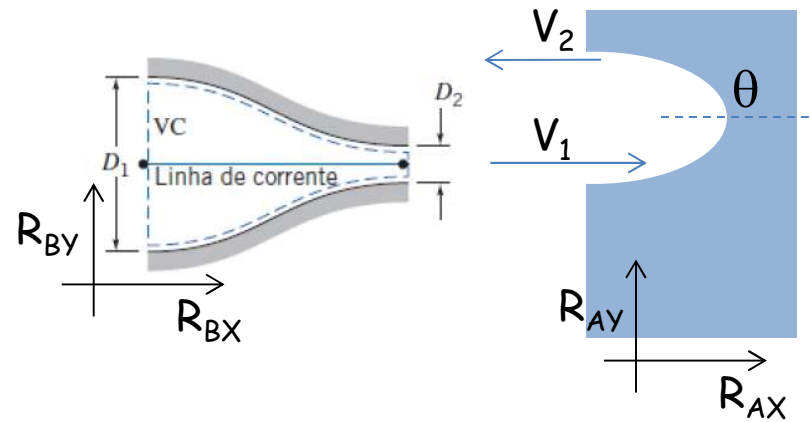
Determine:





## Caso 4 – Cálculo das forças de ancoragem

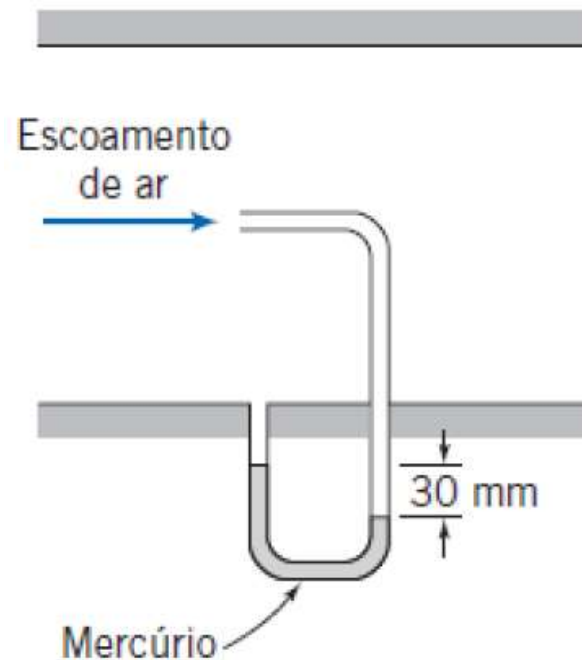
Determine:





## Escoamento em **Tubo de Pitot** com a aplicação da **Equação de Bernoulli**

Um tubo pitot é inserido em um escoamento de ar (na condição-padrão) para medir a velocidade do escoamento. O tubo é inserido apontando para montante dentro do escoamento de modo que a pressão captada pela sonda é a pressão de estagnação. A pressão estática é medida no mesmo local do escoamento com uma tomada de pressão na parede. Se a diferença de pressão é de 30 mm de mercúrio, determine a velocidade do escoamento.





## Escoamento em **Tubo de Pitot** com a aplicação da **Equação de Bernoulli**

Escrevendo a equação de Bernoulli para a linha de corrente de estagnação (com  $\Delta z = 0$ ), obtemos

$$\frac{p_0}{\rho} = \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2}$$

$p_0$  é a pressão de estagnação na ponta do tubo pitot onde a velocidade foi reduzida a zero, sem atrito. Resolvendo para  $V$ , temos

$$V = \sqrt{\frac{2(p_0 - p)}{\rho_{\text{ar}}}}$$

Da figura,

$$p_0 - p = \rho_{\text{Hg}}gh = \rho_{\text{H}_2\text{O}}ghSG_{\text{Hg}}$$

e

$$\begin{aligned} V &= \sqrt{\frac{2\rho_{\text{H}_2\text{O}}ghSG_{\text{Hg}}}{\rho_{\text{ar}}}} \\ &= \sqrt{2 \times 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 30 \text{ mm} \times 13,6 \times \frac{\text{m}^3}{1,23 \text{ kg}} \times \frac{1 \text{ m}}{1000 \text{ mm}}} \\ V &= 80,8 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Para  $T = 20^\circ\text{C}$ , a velocidade do som no ar é 343 m/s. Portanto,  $M = 0,236$ , e a hipótese de escoamento incompressível é válida.

## 4.7 O Princípio da Quantidade de Movimento Angular (Máquinas de Fluxo)

Abordagem de **volume de controle** na **forma integral** relaciona a taxa de variação da **propriedade extensiva**,  $N$ , para um sistema, com as variações temporais desta propriedade associada ao volume de controle

$$\left( \frac{dN}{dt} \right)_{\text{sistema}} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{VC}} \eta \rho dV + \int_{\text{SC}} \eta \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} N = \vec{H}, \text{ então } \eta = \vec{r} \times \vec{V} \\ \vec{T} = \frac{d\vec{H}}{dt} \Bigg)_{\text{sistema}} \end{array} \right.$$

$$\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F}_s + \int_{M(\text{sistema})} \vec{r} \times \vec{g} dm + \vec{T}_{\text{eixo}}$$

$$\underbrace{\vec{r} \times \vec{F}_s + \int_{\text{VC}} \vec{r} \times \vec{g} \rho dV}_{(1)} + \underbrace{\vec{T}_{\text{eixo}}}_{(2)} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{VC}} \underbrace{\vec{r} \times \vec{V} \rho dV}_{(3)} + \int_{\text{SC}} \underbrace{\vec{r} \times \vec{V} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}}_{(6)}$$

## 4.7 O Princípio da Quantidade de Movimento Angular (Máquinas de Fluxo)

### Simplificações

- (1) Torques devido a *forças de superfície* são considerados *desprezíveis*.  $r \times F_s = 0$
- (2) Torques devido a *forças de campo* consideram-se *desprezíveis*.  $r \times B = 0$  (por simetria)
- (3) Escoamento em *regime permanente*,  $V = V(x, y, z)$
- (4) Eixo  $z$  *alinhado com o eixo de rotação* da máquina.
- (5) Fluido atravessa as fronteiras do V.C. em duas seções, na entrada (subíndice 1) e a saída ( subíndice 2).
- (6) *Escoamento uniforme* nas seções de entrada e saída do fluido.

## 4.7 O Princípio da Quantidade de Movimento Angular (Máquinas de Fluxo)

$$\vec{T}_{\text{eixo}} = \int_{SC} \vec{r} \times \vec{V} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \quad \text{Vetorial}$$

$$\int_{sc} (\vec{r} \times \vec{V})_z \rho \vec{V} d\vec{A} = \int_{A1} (\vec{r}_1 \times \vec{V}_1)_z \rho_1 \vec{V}_1 d\vec{A}_1 + \int_{A2} (\vec{r}_2 \times \vec{V}_2)_z \rho_2 \vec{V}_2 d\vec{A}_2$$

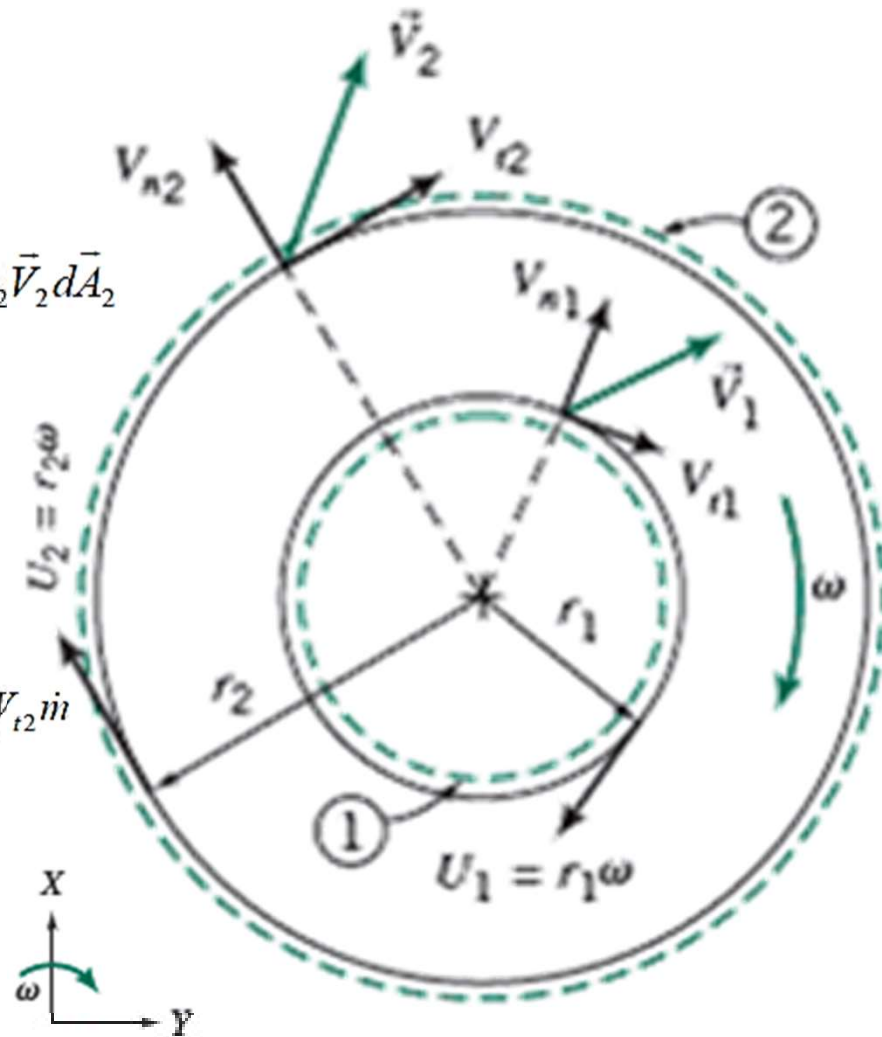
Da conservação da massa

$$\int_A \rho \vec{V} d\vec{A} = \pm \dot{m}$$

$$\int_{A1} (\vec{r}_1 \times \vec{V}_1)_z \rho_1 \vec{V}_1 d\vec{A}_1 + \int_{A2} (\vec{r}_2 \times \vec{V}_2)_z \rho_2 \vec{V}_2 d\vec{A}_2 = -r_1 V_{t1} \dot{m} + r_2 V_{t2} \dot{m}$$

$$T_{\text{eixo}} = (r_2 V_{t2} - r_1 V_{t1}) \dot{m}$$

$$T_{\text{eixo}} = (r_2 V_{t2} - r_1 V_{t1}) \dot{m} = (r_2 V_{t2} - r_1 V_{t1}) \rho Q$$





## 4.7 O Princípio da Quantidade de Movimento Angular (Máquinas de Fluxo)

$$\vec{T}_{\text{eixo}} = \int_{SC} \vec{r} \times \vec{V} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \quad \text{Vetorial}$$

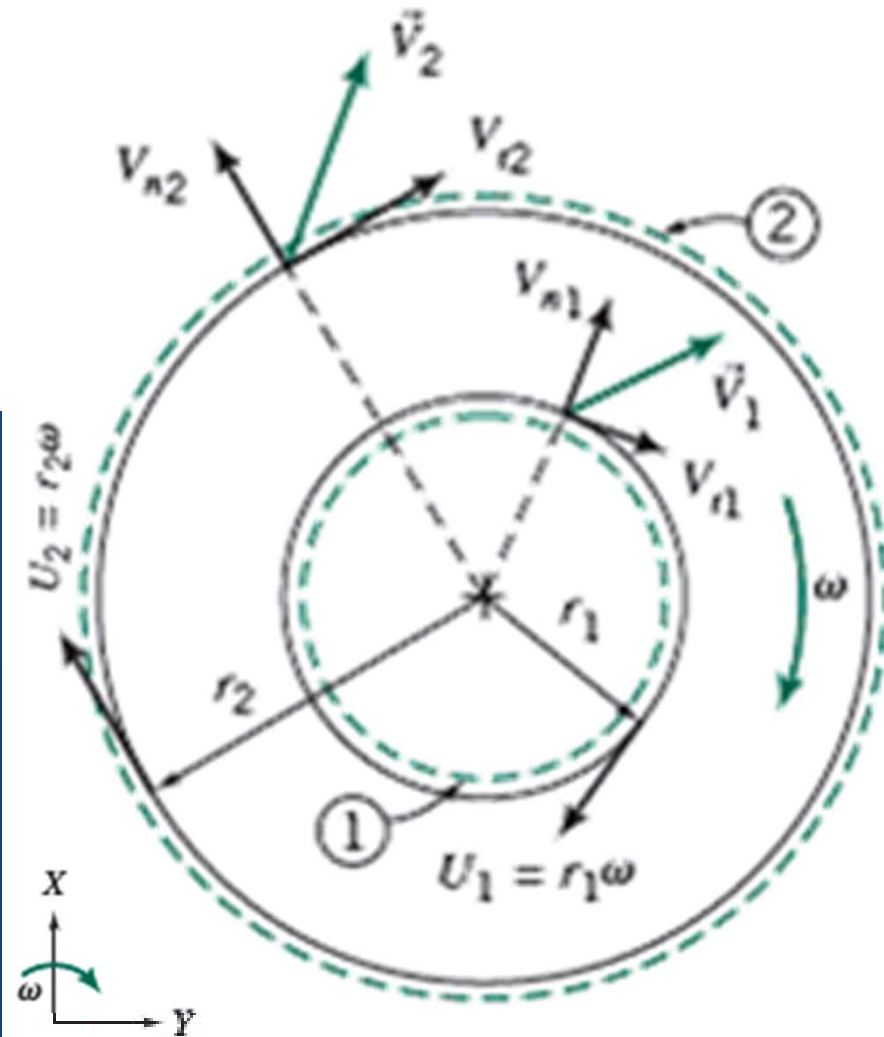
$$T_{\text{eixo}} = (r_2 V_{t_2} - r_1 V_{t_1}) \dot{m} \quad \text{Escalar}$$



Vel. tangenciais positivas,  
quando no mesmo sentido  
da velocidade da pá,  $U$ .

Esta convenção de sinal conduz a:

- $T_{\text{eixo}} > 0$  para bombas, ventiladores, sopradores e compressores;
- $T_{\text{eixo}} < 0$  para turbinas.



## 4.7 O Princípio da Quantidade de Movimento Angular (Máquinas de Fluxo)

$$\dot{W}_m = \omega T_{\text{eixo}}$$

$$\dot{W}_m = \omega \hat{k} \cdot (r_2 V_{t_2} - r_1 V_{t_1}) \dot{m} \hat{k}$$

$$\dot{W}_m = \omega T_{\text{eixo}} = \omega (r_2 V_{t_2} - r_1 V_{t_1}) \dot{m}$$

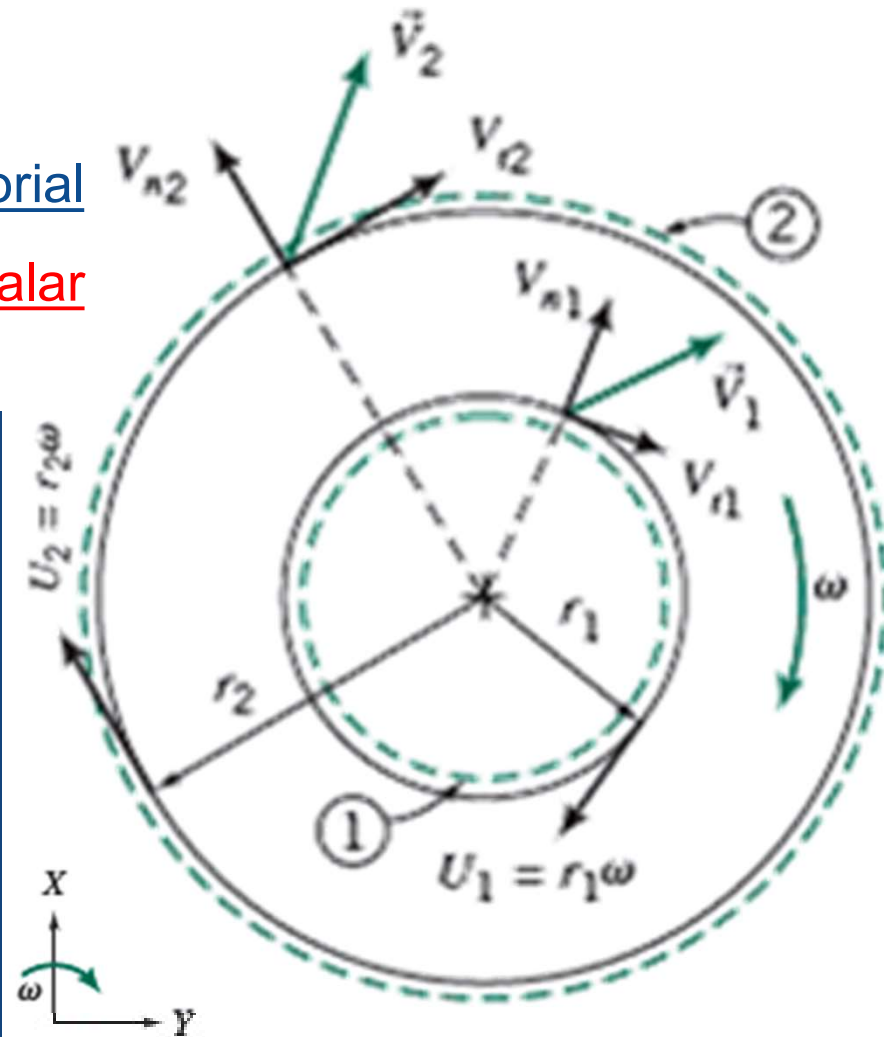
Vetorial

Escalar



Esta convenção de sinal conduz a:

- Para uma bomba,  $\dot{W} > 0$  e a quant. de mov. angular do fluido deve umentar.
- Para uma turbina,  $\dot{W} < 0$  e a quant. de mov. angular do fluido deve diminuir.





## Importante! Lista de Exercícios

Como reforço do aprendizado do conteúdo apresentado em sala de aula, são sugeridos os exercícios dispostos na lista abaixo. Bom estudo!

Exercícios Fox - 4ed									
<b>Capítulo 4</b>									
Exercícios FOX 4ED	4.23	4.27	4.29	4.34	4.48	4.51	4.57	4.69	4.74
	4.135	4.138	4.153	4.158					

Exercícios Fox - 8ed									
<b>Capítulo 4</b>									
Exercícios FOX 8ED	4.17	4.25	4.33	4.38		4.54	4.67	4.78	4.85
			4.138	4.146					

# Capítulo 5 – Introdução a Análise Diferencial dos Movimentos dos Fluidos

Objetivos:

- ≡ Conservação da Massa
- ≡ Função de corrente para um Escoamento Incompressível Bidimensional
- ≡ O Movimento de um Elemento Fluido
- ≡ Fluidos Newtonianos – A Equação de Navier-Stokes

# Conservação da Massa – Equação da Continuidade

Considerando o escoamento através de um volume de controle, podemos afirmar, argumentando fisicamente, que a

$$\boxed{\text{Taxa de Variação de Massa que Sai do Volume de Controle}} \ominus \boxed{\text{Taxa de Variação de Massa que Entra no Volume de Controle}} \oplus \boxed{\text{Taxa de Variação de Massa Gerada no Volume de Controle}} = 0$$

ou dito de outra forma

$$\iint_{s.c.} \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} = - \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{v.c.} \rho dV$$

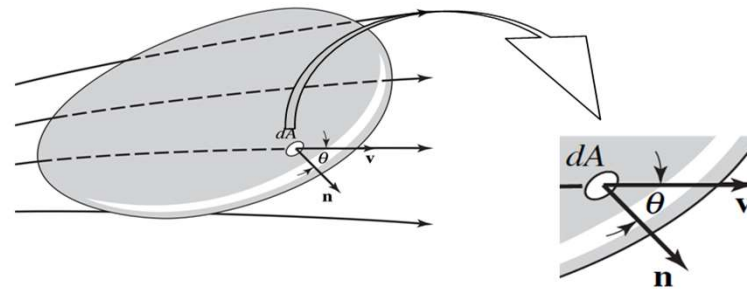


Figura 30  
Escoamento de fluido através de um volume de controle arbitrário.

$$\boxed{\text{Taxa de Variação de Massa Através do Volume de Controle}} = \ominus \boxed{\text{Taxa de Variação de Massa Dentro do Volume de Controle}}$$

Pois  $\vec{v} \cdot d\vec{S}$  mede o volume de fluido que atravessa um elemento de superfície por unidade de tempo e  $\rho \vec{v} \cdot d\vec{S}$  mede sua massa. Porém, pelo Teorema da Divergência,

$$\iint_{s.c.} \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} = \iiint_{v.c.} \nabla \cdot (\rho \vec{v}) dV \quad (61)$$

Consequentemente

$$\iiint_{v.c.} \left[ \nabla \cdot (\rho \vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right] dV = 0$$

Visto que esta equação vale para qualquer volume, o integrando deve se anular:

$$\nabla \cdot (\rho \vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (62)$$

A relação (62) é a famosa *Equação da Continuidade* ou de *Conservação da Massa*.

# Conservação da Massa – Equação da Continuidade

Equação da Continuidade

$$\iint_{s.c.} \rho \vec{v} \cdot \overline{ds} = -\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{v.c.} \rho dV$$

Aplicando o Teorema da Divergência

$$\iint_{s.c.} \rho \vec{v} \cdot \overline{ds} = \iiint_{v.c.} \nabla \cdot (\rho \vec{v}) dV$$

onde

$$\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}; \quad \overline{ds} = dy.dz.\hat{i} + dx.dz.\hat{j} + dx.dy.\hat{k}$$

tem-se que

$$\vec{v} \cdot \overline{ds} = v_x dy.dz + v_y dx.dz + v_z dx.dy$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = \left( \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) \cdot (v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \Rightarrow$$

$$(\nabla \cdot \vec{v}) dV = \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) dx.dy.dz = v_x dy.dz + v_y dx.dz + v_z dx.dy = \vec{v} \cdot \overline{ds} \Rightarrow$$

$$\iint_{s.c.} \rho \vec{v} \cdot \overline{ds} = -\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{v.c.} \rho dV$$

# Conservação da Massa – Equação da Continuidade

A partir da equação

$$\iint_{s.c.} \rho \vec{v} \cdot \vec{ds} = -\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{v.c.} \rho dV$$

tem se que

$$\iint_{s.c.} \rho \vec{v} \cdot \vec{ds} = -\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{v.c.} \rho dV \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \iiint_{v.c.} \nabla \cdot (\rho \vec{v}) dV = -\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{v.c.} \rho dV$$

agrupando se os integrandos, tem se que

$$\iiint_{v.c.} \left[ \nabla \cdot (\rho \vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right] dV = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot (\rho \vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \text{ que é a}$$

expressão da continuidade em conservação de massa



## Estudo Dirigido

### Atividade em grupo (em sala)

**Exemplo 28** – Quais dos seguintes conjuntos de equações representam possíveis casos de escoamento bidimensional incompressível?

- (a)  $u = 2x^2 + y^2 - x^2y$        $v = x^3 + x(y^2 - 2y)$   
(b)  $u = 2xy - x^2y + y$        $v = 2xy - y^2 + x^2$   
(c)  $u = xt + 2y$        $v = xt^2 - yt$   
(d)  $u = (x + 2y)xt$        $v = -(2x + y)yt$

**Exemplo 29** – Quais dos seguintes conjuntos de equações representam possíveis casos de escoamento tridimensional incompressível?

- (a)  $u = y^2 + 2xz$        $v = -2yz + x^2yz$        $w = \frac{1}{2}(x^2y^2) + x^3y^4$   
(b)  $u = xyzt$        $v = -xyzt^2 + x^2$        $w = (z^2/2)(xt^2 - yt)$   
(c)  $u = x^2 + y + z^2$        $v = x - y + z$        $w = -2xz + y^2 + z$





## Exemplo

**Exemplo 30** – No escoamento bidimensional de um fluido incompressível em que  $u=x^2-2x+2y$ , deseja-se determinar possíveis valores de  $v$  se o fluido escoar numa canaleta retangular em regime permanente.

Utilizando a equação da continuidade vem

$$\cancel{\frac{\partial \rho}{\partial t}} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \Rightarrow \rho(\nabla \cdot \vec{v}) = 0$$

=0, pois  $\rho = \text{cte.}$   
(Incompressível)

$$\text{ou } \nabla \cdot \vec{v} = 0$$

Em coordenadas retangulares

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Como se trata de escoamento bidimensional  $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x}$

Como  $u = x^2 - 2x + 2y$ , teremos  $\frac{\partial v}{\partial y} = -(2x - 2) \Rightarrow v = -2xy + 2y + f(x)$

Como qualquer função  $f(x)$  é permitida, existem infinitas soluções que satisfazem as condições impostas pelo problema. A solução mais simples seria atribuir  $f(x) = 0$ .

Assim  $v = -2xy + 2y$ .

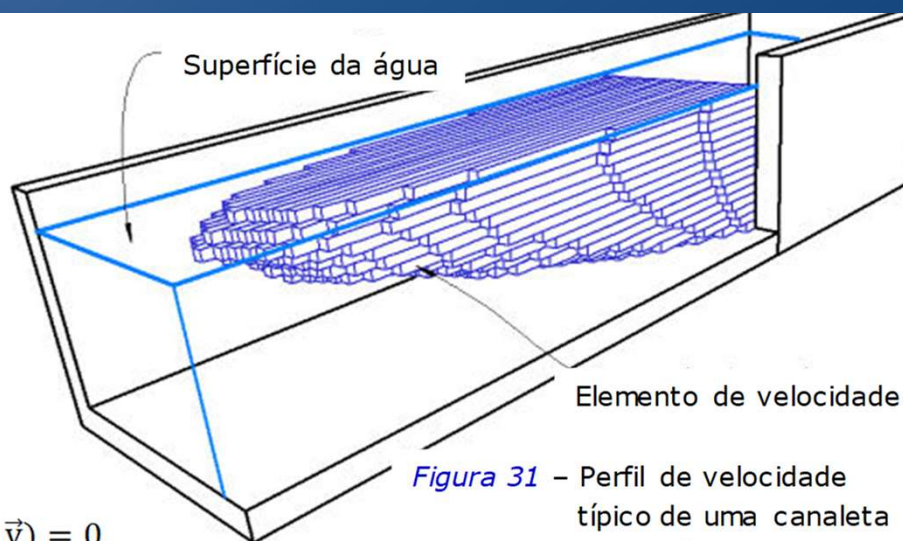


Figura 31 – Perfil de velocidade típico de uma canaleta retangular



## Estudo Dirigido Atividade em grupo (em sala)

**Exemplo 31** – Um campo de escoamento compressível é descrito por

$$\rho \vec{v} = (ax\vec{i} - bxy\vec{j})e^{-kt}$$

em que  $x$  e  $y$  são coordenadas dadas em metros,  $t$  em segundos e  $a$ ,  $b$  e  $k$  são constantes apropriadas e tal forma que  $\rho e \vec{v}$  sejam obtidas em  $\frac{kg}{m^3}$  e  $\frac{m}{s}$ . Calcule a taxa de variação da massa específica por unidade de tempo num ponto qualquer.

A partir da equação da continuidade vem  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \vec{v}) = -\left(\frac{\partial \vec{i}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{j}}{\partial y} + \frac{\partial \vec{k}}{\partial z}\right) \cdot (ax\vec{i} - bxy\vec{j})e^{-kt} \text{ ou } \frac{\partial \rho}{\partial t} = (bx - a)e^{-kt}$$

**Exemplo 32** – A componente  $y$  da velocidade em um campo de escoamento incompressível e em regime permanente no plano  $xy$  é

$$v = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

Mostre que a expressão mais simples para a componente  $x$  da velocidade é

$$u = \frac{1}{(x^2 + y^2)} - \frac{2y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

# Lei da Viscosidade de Newton

A viscosidade é a propriedade de um fluido resistir à taxa de deformação enquanto atuam forças de cisalhamento sobre ele. É uma propriedade *intensiva*: do mesmo modo que a temperatura, a viscosidade não depende da quantidade de fluido.

A viscosidade varia com a temperatura, composição e pressão exercida sobre o fluido, mas é independente da taxa de deformação por cisalhamento. A *lei de Newton para a viscosidade* é a relação dada por:

$$\text{viscosidade} = \frac{\text{tensão de cisalhamento}}{\text{taxa de deformação por cisalhamento}} \quad (98)$$

## Deformação de um Elemento de Fluido

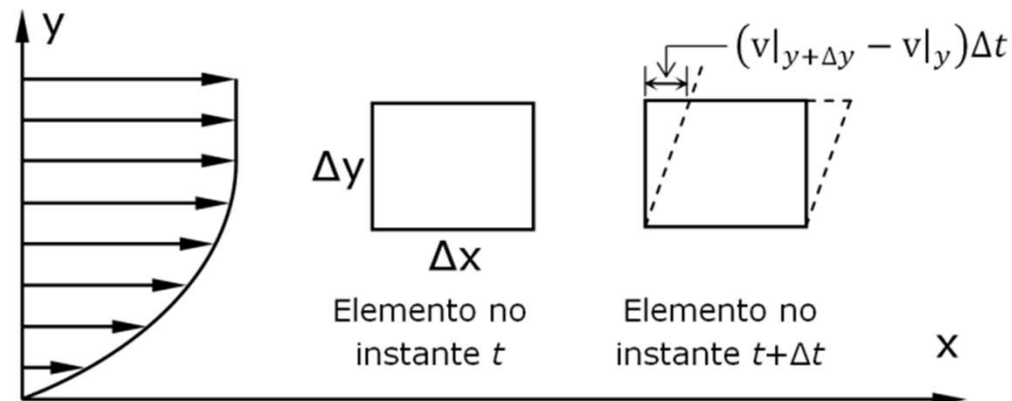


Figura 39 - Deformação de um elemento de fluido

# Mecânica dos Fluidos

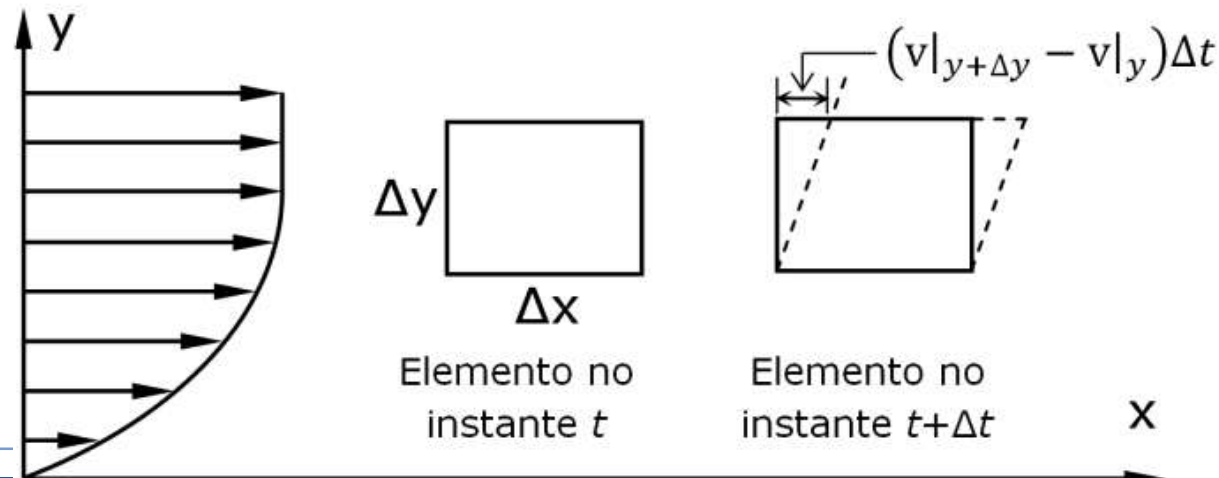
## Lei da Viscosidade de Newton

A viscosidade é a propriedade de um fluido resistir à taxa de deformação enquanto atuam forças de cisalhamento sobre ele. É uma propriedade *intensiva*: do mesmo modo que a temperatura, a viscosidade não depende da quantidade de fluido.

A viscosidade varia com a temperatura, composição e pressão exercida sobre o fluido, mas é independente da taxa de deformação por cisalhamento. A *lei de Newton para a viscosidade* é a relação dada por:

$$\text{viscosidade} = \frac{\text{tensão de cisalhamento}}{\text{taxa de deformação por cisalhamento}} \quad (98)$$

## Deformação de um Elemento de Fluido



# Deformação de um Elemento de Fluido

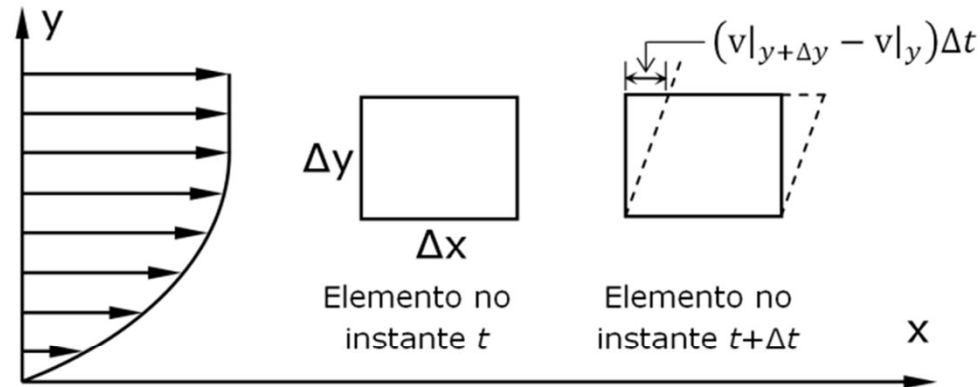


Figura 39 – Deformação de um elemento de fluido

A taxa de deformação cisalhante num ponto é definida por  $-\frac{d\delta}{dt}$ . Da fig. vemos que

$$-\frac{d\delta}{dt} = \lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\delta|_{t+\Delta t} - \delta|_t}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\left\{ \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \left[ \frac{(v|_{y+\Delta y} - v|_y)\Delta t}{\Delta y} \right] \right\} - \frac{\pi}{2}}{\Delta t} \right)$$

$$\text{No limite} \quad -\frac{d\delta}{dt} = \frac{dv}{dy} = \text{Taxa de Deformação por Cisalhamento} \quad (99)$$

# Deformação de um Elemento de Fluido

## Deformação de um Elemento de Fluido

A partir da definição (98) e da equação (99) obtemos a expressão analítica da lei de Newton para a viscosidade:

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy} \quad (100)$$

## Unidades de Viscosidade

Pela lei de Newton,

$$\mu = \frac{\tau}{\left(\frac{dv}{dy}\right)}$$

ou na forma dimensional:

$$\frac{\left(\frac{F}{L^2}\right)}{\left(\frac{L}{t}\right)\left(\frac{1}{L}\right)} = \frac{Ft}{L^2}$$

Como  $F$  = força,  $L$  = comprimento e  $t$  = tempo;  
a viscosidade é expressa no sistema internacional em Pa·s

$$1Pa \cdot s = 1 \frac{N \cdot s}{m^2} = 10 \text{ poises} = 0,0289 \frac{\text{slug}}{\text{ft} \cdot s} = 0,6720 \frac{\text{lb}_m}{\text{ft} \cdot s} = 0,0289 \frac{\text{lb}_f \cdot s}{\text{ft}^2}$$

# Deformação de um Elemento de Fluido

## Unidades de Viscosidade

Outra grandeza muito comum em engenharia é a viscosidade cinemática  $\nu$ , definida como a razão  $\frac{\mu}{\rho}$ , onde  $\rho$  é a massa específica, ou seja, no S.I.,  $\nu$  é expressa em  $m^2/s$ .

$$[\nu] = \frac{[\mu]}{[\rho]} = \frac{\left(\frac{M}{LT}\right)}{\left(\frac{M}{L^3}\right)} = \frac{L^2}{T} \quad \left(1 \frac{m^2}{s} = 10^4 \text{ stokes} = 10,76 \frac{ft^2}{s}\right)$$



## Exemplo Viscosidade

**Exemplo 38** – Duas placas paralelas contêm, entre elas, óleo SAE 10 a 20°C. A placa inferior é fixa enquanto a superior se move com velocidade igual a 4,5 m/s. O espaçamento entre as placas é de 0,25 mm. Calcule a tensão por cisalhamento no óleo, dada sua viscosidade nesta temperatura,  $\mu=0,1\text{Pa}\cdot\text{s}$ .

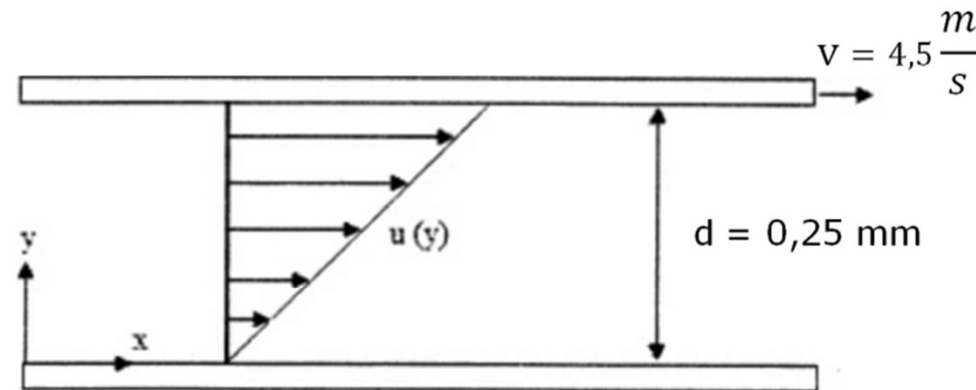


Figura 40 – Exemplo 38

$$\tau_{yx} \cong \mu \frac{\Delta v}{\Delta y} = 0,1 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot \text{s} \left( \frac{4,5 \text{ m}}{0,25 \cdot 10^{-3} \text{ m}} \right) = 1800 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$



# Taxa de Deformação por Cisalhamento

## Taxa de Deformação por Cisalhamento

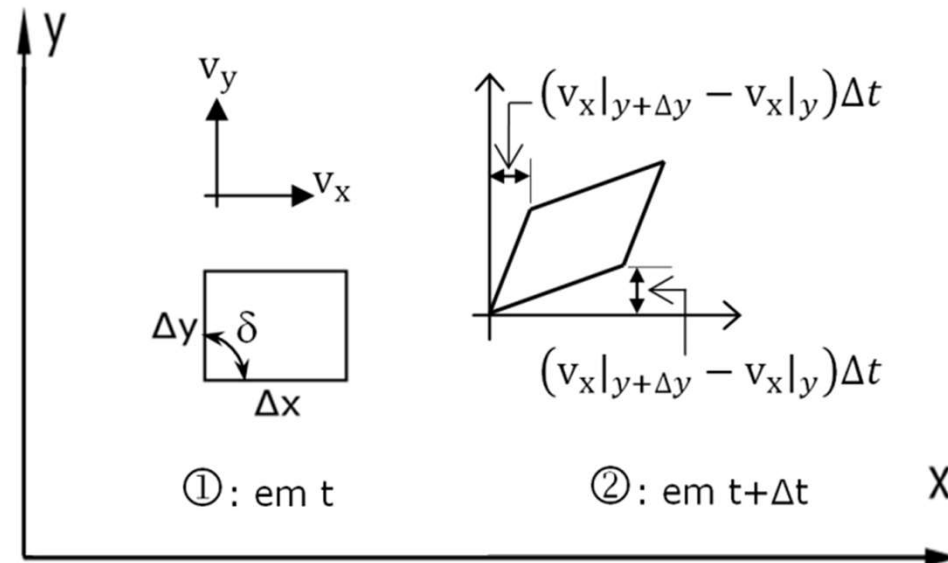


Figura 41 – Deformação por cisalhamento no plano  $xy$

A taxa de deformação por cisalhamento para um elemento tridimensional pode ser determinada a partir dos planos  $xy$ ,  $yz$ ,  $xz$ . No plano  $xy$  a taxa de deformação cisalhante é, uma vez mais,  $-\frac{d\delta}{dt}$ , entretanto, o elemento pode se deformar tanto na direção  $x$  quanto na direção  $y$ .

# Taxa de Deformação por Cisalhamento

À medida que o fluido se move de ① para ②, no intervalo de tempo  $\Delta t$ , tem-se:

$$\begin{aligned} -\frac{d\delta}{dt} &= \lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{\delta|_{t+\Delta t} - \delta|_t}{\Delta t} \right\} \\ &= - \lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{\left( \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \left[ (v_x|_{y+\Delta y} - v_x|_y) \frac{\Delta t}{\Delta y} \right] \right)}{\Delta t} - \frac{\tan^{-1} \left[ (v_y|_{x+\Delta x} - v_y|_x) \frac{\Delta t}{\Delta y} \right] - \frac{\pi}{2}}{\Delta t} \right\} \end{aligned}$$

Como a deformação por cisalhamento é no plano  $xy$ , vem:

$$-\frac{d\delta_{xy}}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \quad (101)$$

Analogamente, nos planos  $yz$  e  $xz$ , obteremos

$$\left\{ \begin{aligned} -\frac{d\delta_{yz}}{dt} &= \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \end{aligned} \right. \quad (102)$$

$$\left\{ \begin{aligned} -\frac{d\delta_{xz}}{dt} &= \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \end{aligned} \right. \quad (103)$$

# Equações de Navier-Stokes

## Equações de Navier-Stokes

As equações de Navier-Stokes foram desenvolvidas em obras independentes de Louis M. H. Navier, "*Mémoires sur les lois du Mouvement des Fluides*" (1822), e George G. Stokes, "*On the Theories of the Internal Friction of Fluids in Motion*", (1845). São a representação diferencial da 2ª lei de Newton para fluidos newtonianos.

Na sua forma mais simples, para escoamentos incompressíveis ( $\rho = \text{constante}$ ) e viscosidade invariante ( $\mu = \text{constante}$ ), pode ser escrita como:

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \vec{g} - \nabla P + \mu \nabla^2 \vec{v} \quad (104)$$

# Equações de Navier-Stokes

## *Preliminares – Tensão de Cisalhamento*

A tensão de cisalhamento é uma grandeza tensorial; portanto é necessário especificar módulo, direção e orientação com respeito a um plano para determinar o tensor dessa tensão.

A identificação se dá através de dois subscritos: primeiro vem a direção do eixo para o qual o plano de ação da tensão cisalhante é normal e depois a direção de ação da tensão de cisalhamento; assim, por exemplo,  $\tau_{yx}$  age na direção  $y$  num plano normal ao eixo dos  $x$  (paralelo ao plano  $yz$ ).

A matriz das tensões de cisalhamento é um tensor simétrico ( $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ ) de 2ª ordem. É especificada por 9 componentes,  $\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{21}$ , etc:

$$\vec{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{bmatrix} \quad (105)$$

# Relação da Viscosidade de Stokes

## *Tensão de Cisalhamento*

A relação da viscosidade de Stokes para os componentes do tensor simétrico de 2ª ordem são dados por

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \quad (106a)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \quad (106b)$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu \left( \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \quad (106c)$$

## *Tensão Normal*

Representam uma generalização da lei de Hooke para um meio elástico e serão apenas indicadas aqui para o caso de fluidos newtonianos em coordenadas cartesianas.

$$\sigma_{xx} = \mu \left( 2 \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \vec{v} \right) - P \quad (107a)$$

$$\sigma_{yy} = \mu \left( 2 \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \vec{v} \right) - P \quad (107b)$$

$$\sigma_{zz} = \mu \left( 2 \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \vec{v} \right) - P \quad (107c)$$

# Relação da Viscosidade de Stokes

A partir da 2ª lei de Newton para um volume de controle elementar, podemos

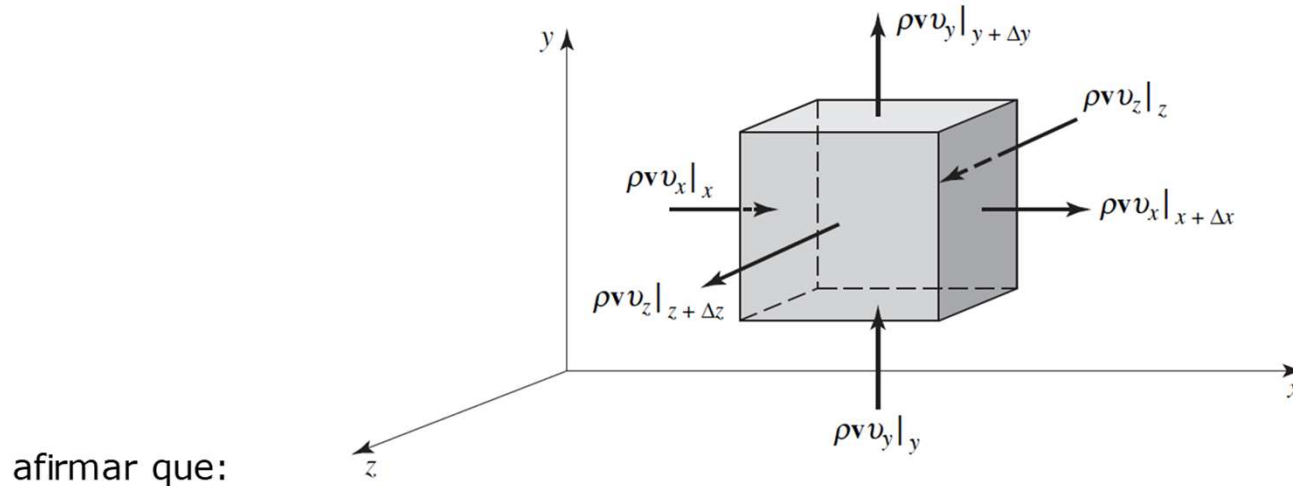


Figura 42 - Fluxo de quantidade de movimento através de um volume de controle elementar

$$\sum \vec{F} = \iint_{S.C.} \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) d\vec{S} + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{V.C.} \rho \vec{v} dV \quad (108)$$

①

Soma das Forças Externas que agem sobre o Volume de Controle

=

②

Taxa Resultante de Fluxo de Momentum Linear Através da S.C

⊕

③

Taxa de Variação Temporal de Momentum Linear Dentro do V.C

Figura 43 - Vistas laterais de um volume de controle elementar que mostram as tensões de cisalhamento atuando no sentido positivo

# Relação da Viscosidade de Stokes

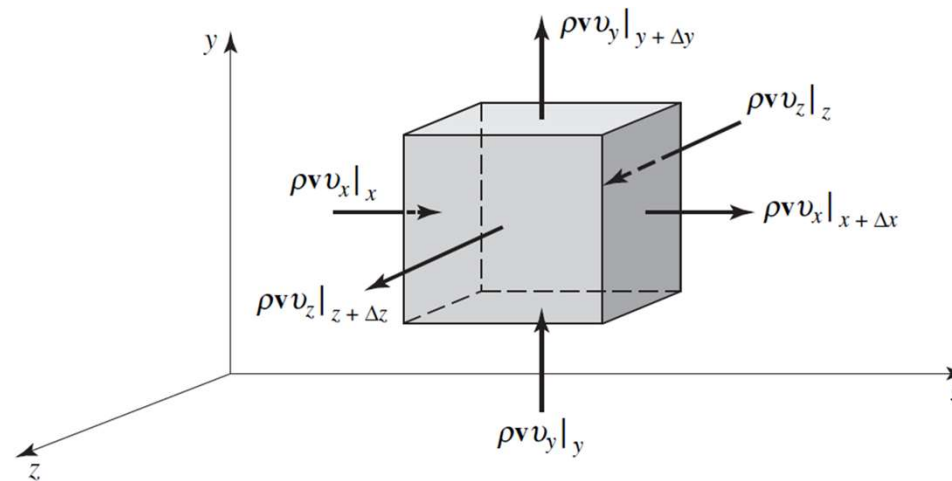


Figura 42 – Fluxo de quantidade de movimento através de um volume de controle elementar

$$\lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0} \frac{\sum \vec{F}}{\Delta x \Delta y \Delta z} = \lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0} \frac{\iint_{S.C.} \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS}{\Delta x \Delta y \Delta z} + \lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{V.C.} \rho \vec{v} dV}{\Delta x \Delta y \Delta z}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \sum F_x &= (\sigma_{xx}|_{x+\Delta x} - \sigma_{xx}|_x) \Delta y \Delta z \\ &+ (\tau_{yx}|_{y+\Delta y} - \tau_{yx}|_y) \Delta x \Delta z \\ &+ (\tau_{zx}|_{z+\Delta z} - \sigma_{zx}|_z) \Delta x \Delta y \\ &+ \rho g_x \Delta x \Delta y \Delta z \end{aligned}$$

# Relação da Viscosidade de Stokes

## Relação da Viscosidade de Stokes

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0} \frac{\sum F_x}{\Delta x \Delta y \Delta z} &= \lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0} \frac{(\sigma_{xx}|_{x+\Delta x} - \sigma_{xx}|_x)}{\Delta x} \\ &+ \lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0} \frac{(\tau_{yx}|_{y+\Delta y} - \tau_{yx}|_y)}{\Delta y} \\ &+ \lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0} \frac{(\tau_{zx}|_{z+\Delta z} - \tau_{zx}|_z)}{\Delta z} + \rho g_x \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0} \frac{\sum F_x}{\Delta x \Delta y \Delta z} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho g_x \quad (109)$$

$$\lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0} \frac{\sum F_y}{\Delta x \Delta y \Delta z} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \rho g_y \quad (110)$$

$$\lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0} \frac{\sum F_z}{\Delta x \Delta y \Delta z} = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho g_z \quad (111)$$



# Relação da Viscosidade de Stokes

## Relação da Viscosidade de Stokes

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad \iint_{S.C.} \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) d\vec{S} &= (\rho \vec{v} v_x|_{x+\Delta x} - \rho \vec{v} v_x|_x) \Delta y \Delta z \\ &+ (\rho \vec{v} v_y|_{y+\Delta y} - \rho \vec{v} v_y|_y) \Delta x \Delta z \\ &+ (\rho \vec{v} v_z|_{z+\Delta z} - \rho \vec{v} v_z|_z) \Delta x \Delta y \\ \lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0} \frac{\iint_{S.C.} \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) d\vec{S}}{\Delta x \Delta y \Delta z} &= \lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0} \frac{(\rho \vec{v} v_x|_{x+\Delta x} - \rho \vec{v} v_x|_x) \Delta y \Delta z}{\Delta x \Delta y \Delta z} \\ &+ \lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0} \frac{(\rho \vec{v} v_y|_{y+\Delta y} - \rho \vec{v} v_y|_y) \Delta x \Delta z}{\Delta x \Delta y \Delta z} \\ &+ \lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0} \frac{(\rho \vec{v} v_z|_{z+\Delta z} - \rho \vec{v} v_z|_z) \Delta x \Delta y}{\Delta x \Delta y \Delta z} \end{aligned}$$

# Relação da Viscosidade de Stokes

## Relação da Viscosidade de Stokes

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0 \\ \Delta z \rightarrow 0}} \frac{\iint_{S.C.} \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) d\vec{S}}{\Delta x \Delta y \Delta z} = \frac{\partial(\rho \vec{v} v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \vec{v} v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \vec{v} v_z)}{\partial z}$$
$$= \vec{v} \left[ \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} \right] + \rho \left[ v_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \right]$$

Mas se fizermos uso da equação da continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0$$
$$\lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0} \frac{\iint_{S.C.} \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) d\vec{S}}{\Delta x \Delta y \Delta z} = -\vec{v} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \left[ v_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \right] \quad (112)$$

## Relação da Viscosidade de Stokes

$$\textcircled{3} \quad \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{v.c.} \rho \vec{v} dV = \frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0 \\ \Delta z \rightarrow 0}} \frac{\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{v.c.} \rho \vec{v} dV}{\Delta x \Delta y \Delta z} = \frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} = \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (113)$$

Reunindo as equações (109), (110), (111), (112), (113):

$$\rho \frac{Dv_x}{Dt} = \rho g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \quad (114a)$$

$$\rho \frac{Dv_y}{Dt} = \rho g_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \quad (114b)$$

$$\rho \frac{Dv_z}{Dt} = \rho g_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \quad (114c)$$

que são equações válidas para qualquer tipo de fluido, independentemente da natureza da relação entre a taxa de deformação e a tensão.

$$\left\{ \text{onde } \rho \frac{Dv_i}{Dt} = \rho \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_i}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_i}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_i}{\partial z} \right) \right\}$$

# Equação de Navier-Stokes

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \vec{g} - \nabla P + \mu \nabla^2 \vec{v}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)$$

$$\rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)$$

# Relação da Viscosidade de Stokes

## Relação da Viscosidade de Stokes

Para fluidos newtonianos as equações (114) se transformam em

$$\rho \frac{Dv_x}{Dt} = \rho g_x - \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \vec{v} \right) + \nabla \cdot \left( \mu \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \right) + \nabla \cdot (\mu \nabla v_x) \quad (115a)$$

$$\rho \frac{Dv_y}{Dt} = \rho g_y - \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \vec{v} \right) + \nabla \cdot \left( \mu \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} \right) + \nabla \cdot (\mu \nabla v_y) \quad (115b)$$

$$\rho \frac{Dv_z}{Dt} = \rho g_z - \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \vec{v} \right) + \nabla \cdot \left( \mu \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \right) + \nabla \cdot (\mu \nabla v_z) \quad (115c)$$

quando (106), (107) e (108) são levadas em (109), (110), (111).

As equações (115) são as famosas *Equações de Navier-Stokes*

# Equação de Navier-Stokes

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \vec{V} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right]$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( 2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \vec{V} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right]$$

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( 2 \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \vec{V} \right) \right]$$

Estas são as famosas equações de Navier-Stokes. Em coordenadas cartesianas estas equações, mais a **equação da continuidade**, formam um conjunto de quatro equações diferenciais parciais não-lineares acopladas para  $u, v, w$  e  $p$ .

Soluções para estas equações têm sido obtidas mas somente para geometrias e condições iniciais ou de contorno mais simples, para as quais muitos dos termos podem ser considerados iguais a zero.

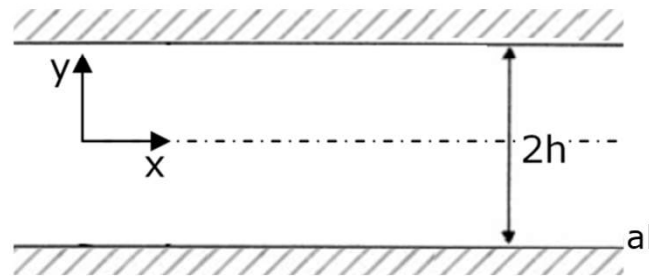
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \nabla \cdot \vec{V} = 0$$

Ah! 
$$\frac{Du}{Dt} = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t}$$

A derivada assim definida é comumente chamada de **derivada substancial**, **derivada material** ou **derivada de partícula**.

# Escoamento em um Canal (Aplicação)

Seja o escoamento unidimensional num canal, em regime permanente, como mostrado esquematicamente na fig. 44. O escoamento se dá na direção do eixo de  $x$ . Encontre o perfil de velocidade, a vazão e a perda de carga, aplicando a eq. Navier Stokes na sua forma mais simples.



## *Hipóteses de trabalho*

- (i) Regime permanente
- (ii) Escoamento desenvolvido, laminar e unidimensional
- (iii) Ação do campo gravitacional desprezada
- (iv) Fluido incompressível e viscosidade invariante

## Escoamento em um Canal (Aplicação)

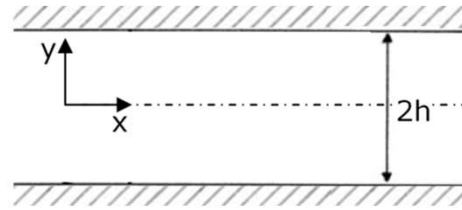


Figura 44 – Escoamento em um canal

Basta aplicarmos a equação(104), já que  $\rho = \text{constante}$  e  $\mu = \text{constante}$ .

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Rightarrow \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}$$

Pois  $v = w = 0$  e o escoamento é plenamente desenvolvido  $\left(\frac{\partial u}{\partial x} = 0\right)$

*Condições de Contorno:*

$$\begin{cases} y = h \Rightarrow u = 0 \\ y = -h \Rightarrow u = 0 \end{cases}$$

Assim, integrando duas vezes a equação

$$\left( \rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\mu} \frac{dP}{dx} y + C_1 \quad \Rightarrow \quad u = \frac{1}{2\mu} \frac{dP}{dx} y^2 + C_1 y + C_2$$



# Escoamento em um Canal (Aplicação)

*Determinação das Constantes arbitrárias*

$$\begin{cases} 0 = \frac{1}{2\mu} \frac{dP}{dx} h^2 - C_1 h + C_2(\alpha) \\ 0 = \frac{1}{2\mu} \frac{dP}{dx} h^2 + C_1 h + C_2(\beta) \end{cases} \quad (\alpha) + (\beta): 2C_1 h = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \text{ e } C_2 = -\frac{1}{2\mu} \frac{dP}{dx} h^2$$

e, finalmente

$$u(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{dP}{dx} (y^2 - h^2) \quad (116)$$

O *valor máximo* ocorrerá, claramente, em  $y=0$

$$u_{\text{máx}} = -\frac{1}{2\mu} \frac{dP}{dx} h^2 \quad (117)$$

# Escoamento em um Canal (Aplicação)

*Vazão volumétrica por unidade de profundidade*

$$\begin{aligned} Q &= \int_{-h}^h u(y) dy = 2 \int_0^h u(y) dy = 2 \int_0^h \left[ \frac{1}{2\mu} \frac{dP}{dx} (y^2 - h^2) \right] dy \\ &= 2 \left( \frac{1}{2\mu} \cdot \frac{dP}{dx} \right) \left\{ \frac{y^3}{3} \Big|_0^h - h^2 y \Big|_0^h \right\} = \left( \frac{1}{\mu} \cdot \frac{dP}{dx} \right) \left( \frac{h^3}{3} - h^3 \right) \end{aligned}$$

$$Q = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\mu} \cdot \frac{dP}{dx} \cdot h^3 \quad (118)$$

*Perda de carga*

$$h_L = \frac{\Delta P}{\rho} \quad \text{e fazendo} \quad \frac{dP}{dx} = \frac{\Delta P}{L}, \quad \text{vem:}$$

$$Q = -\frac{2}{3\mu} \cdot \frac{\Delta P}{L} h^3$$

Portanto

$$\frac{\Delta P}{\rho} = h_L = \frac{3}{2} \cdot \frac{\mu L Q}{\rho h^3} \quad (119)$$



## Exemplo

**Exemplo 39** – Um filme de espessura constante de um líquido viscoso escoa em regime laminar por uma placa inclinada de um ângulo  $\theta$ . O perfil de velocidade (mostrado esquematicamente na Figura 45) é dado por  $u = Cy(2h - y)$ ,  $v=w=0$ .

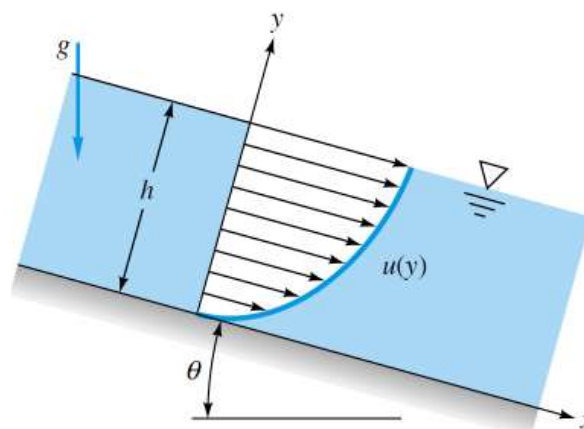


Figura 45 – Exemplo 39

- (a) Encontre a constante  $C$  em termos de: peso específico, viscosidade e ângulo  $\theta$ .
- (b) Encontre a vazão volumétrica  $Q$  por unidade de largura usando esses parâmetros.

### *Hipóteses de trabalho*

- (i) Regime permanente
- (ii) Escoamento desenvolvido, laminar e unidimensional
- (iii) Fluido incompressível e viscosidade invariante



## Exemplo

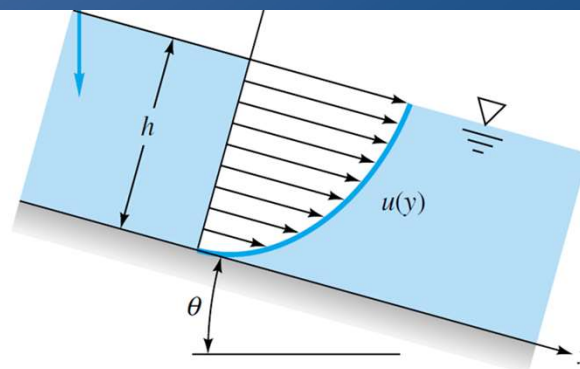


Figura 45 – Exemplo 39

(a) A pressão atmosférica atua ao longo da superfície  $y=L$ , portanto  $\frac{\partial P}{\partial x} = 0$ ; assim, as equações de Navier-Stokes se reduzem à equação

$$\rho \left( v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = - \frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x + \mu \nabla^2 v_x$$

Ou  $0 = 0 + \rho g \sin \theta + \mu (-2C)$

$$\mu = \frac{\rho g \sin \theta}{2C} \quad \text{ou ainda} \quad C = \frac{\rho g \sin \theta}{2\mu}$$

(b) A vazão volumétrica  $Q$  por unidade de largura será

$$Q = \int_0^h v_x dy = \int_0^h Cy(2h - y) dy = \frac{2}{3} Ch^3 = \frac{\rho gh^3 \sin \theta}{3\mu} \text{ por unidade de largura}$$



## Exemplo

**Exemplo 40** – Dois líquidos incompressíveis (A e B) escoam, em regime permanente, desenvolvido e laminar, num plano inclinado que forma um ângulo  $\theta$  com a horizontal, conforme mostrado na figura abaixo:

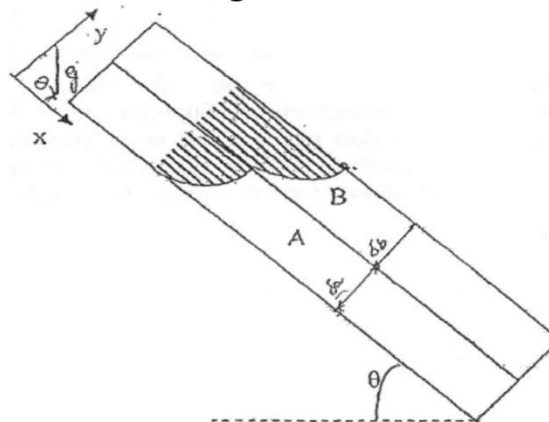


Figura 46  
Exemplo 40

Os dados sobre os filmes seguem na tabela abaixo:

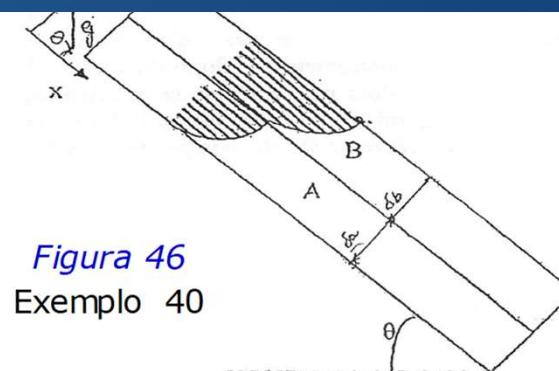
Filme	Massa Especifica	Viscosidade	Espessura
A	$\rho_a$	$\mu_a$	$\delta_a$
B	$\rho_b$	$\mu_b$	$\delta_b$

Considerando que o comprimento do sistema é muito grande, se comparada com as espessuras dos filmes, deduza equações diferenciais para os perfis de velocidade nos filmes A e B ( $v_{ax}(y)$  e  $v_{bx}(y)$ , respectivamente).



# Exemplo

Filme	Massa Específica	Viscosidade	Espessura
A	$\rho_a$	$\mu_a$	$\delta_a$
B	$\rho_b$	$\mu_b$	$\delta_b$



## Hipóteses de trabalho

- (i) Regime permanente
- (ii) Escoamento desenvolvido, laminar e unidimensional
- (iii) Fluido incompressível e viscosidade invariante
- (iv) Condição de escorregamento na interface entre os filmes A e B não considerável.

Analisando a eq. de Navier-Stokes na direção do movimento (x), teremos:

$$\rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = \mu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x$$

$v_x$  é função só de y  
 Permanente  
 Laminar ( $v_y=0$ )  
 Desenvolvido (não há  $v_z$  e  $v_x$  não é função nem de y nem de z)  
 $v_x$  é função só de y  
 Livres (não há  $\neq$  de pressão)



# Exemplo

Analisando a eq. de Navier-Stokes na direção do movimento (x), teremos:

$v_x$  é função só de  $y$

Laminar ( $v_y=0$ )

$v_x$  é função só de  $y$

Livres (não há  $\neq$  de pressão)

$$\rho \left( \cancel{\frac{\partial v_x}{\partial t}} + v_x \cancel{\frac{\partial v_x}{\partial x}} + v_y \cancel{\frac{\partial v_x}{\partial y}} + v_z \cancel{\frac{\partial v_x}{\partial z}} \right) = \mu \left( \cancel{\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \cancel{\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}} \right) - \cancel{\frac{\partial P}{\partial x}} + \rho g_x$$

Permanente

Desenvolvido (não há  $v_z$  e  $v_x$  não é função nem de  $y$  nem de  $z$ )

$$-\rho g_x = \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \Rightarrow \frac{d^2 v_x}{dy^2} = \frac{-\rho g \text{ sen } \theta}{\mu} \xrightarrow[\text{em relação a } y]{\text{integrando}} \frac{dv_x}{dy} = \frac{-\rho g \text{ sen } \theta}{\mu} y + C_1$$

$$\xrightarrow[\text{em relação a } y]{\text{integrando}} v_x = \frac{-\rho g \text{ sen } \theta}{2\mu} y^2 + C_1 y + C_2$$

*Condições de Contorno*

$$y = 0 \Rightarrow v_a = 0$$

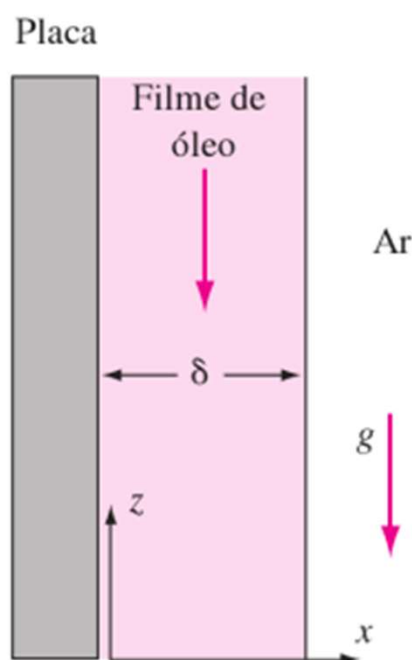
$$y = \delta_a \Rightarrow v_a = v_b$$

$$y = \delta_a \Rightarrow \mu_a \frac{\partial v_a}{\partial y} = \mu_b \frac{\partial v_b}{\partial y}$$

$$y = \delta_a + \delta_b \Rightarrow v_b = 0$$



**Exemplo 41** – Óleo, de massa específica  $\rho$  e viscosidade  $\mu$ , é drenado continuamente por um lado de uma placa vertical, como ilustrado na Figura 47. Após uma região de desenvolvimento próximo ao topo da placa, o filme de óleo se tornará independente de  $z$  e com espessura constante  $\delta$ . Suponha que  $w$  seja apenas função de  $x$  e que a atmosfera não ofereça resistência ao cisalhamento da superfície do filme.



(a) Resolva a equação de Navier-Stokes para  $w(x)$  e faça um esboço de sua forma aproximada.

(b) Considere que a espessura  $\delta$  do filme e a inclinação do perfil de velocidade na parede  $[\partial w / \partial x]_{\text{parede}}$  foram medidos experimentalmente com grande precisão.

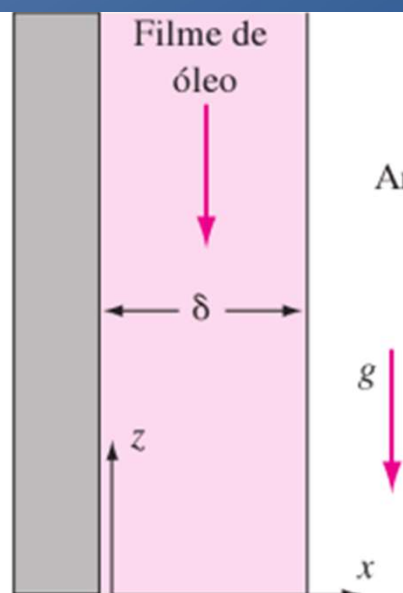
### Hipóteses de trabalho

- (i) Regime permanente
- (ii) Escoamento desenvolvido, laminar e unidimensional
- (iii) Fluido incompressível e viscosidade invariante
- (iv) Condição de escorregamento na interface entre os filmes A e B não considerável





## Exemplo



Condições de Contorno

1. condição de não deslizamento
2. não há tensão de cisalhamento na interface entre o filme de óleo e o ar

(a) Não há gradiente de pressão  $\frac{\partial P}{\partial z}$  porque a pressão exercida pelo ar é constante ( $P_{atm}$ ). A componente z das equações de Navier-Stokes será  $\mu \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} = \rho g$

$$\frac{dv_z}{dx} = \frac{\rho g}{\mu} x + C_1 \Rightarrow v_z = \frac{\rho g}{\mu} \cdot \frac{x^2}{2} + C_1 x + \frac{\rho g}{\mu} x + C_2$$

$$x = 0 \Rightarrow v_z = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$x = \delta \Rightarrow \mu \frac{\partial v_z}{\partial x} = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{\rho g}{\mu} \delta$$

$$v_z = \frac{\rho g}{2\mu} x(x - 2\delta)$$

$$(b) \left. \frac{dv_z}{dx} \right|_{parede} = \frac{-\rho g \delta}{\mu} \text{ ou ainda } \mu = \frac{-\rho g \delta}{\left. \frac{dv_z}{dx} \right|_{parede}}$$

# EQUAÇÕES DE NAVIER STOKES EM COORDENADAS CILÍNDRICAS

As **Equações de Navier-Stokes** podem ser expressas em coordenadas cilíndricas

$$\begin{aligned}
 r : \rho \left( \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\phi}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\phi^2}{r} \right) = \\
 - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right] + \rho g_r \\
 \phi : \rho \left( \frac{\partial u_\phi}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\phi}{\partial r} + \frac{u_\phi}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + u_z \frac{\partial u_\phi}{\partial z} + \frac{u_r u_\phi}{r} \right) = \\
 - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_\phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\phi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u_\phi}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} - \frac{u_\phi}{r^2} \right] + \rho g_\phi \\
 z : \rho \left( \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\phi}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \phi} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = \\
 - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right] + \rho g_z.
 \end{aligned}$$



## Estudo Dirigido Atividade em grupo (em sala)

### Example 5.10 ANALYSIS OF LAMINAR VISCOMETRIC FLOW BETWEEN COAXIAL CYLINDERS

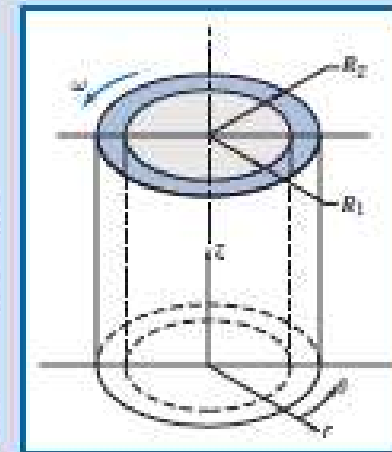
A viscous liquid fills the annular gap between vertical concentric cylinders. The inner cylinder is stationary, and the outer cylinder rotates at constant speed. The flow is laminar. Simplify the continuity, Navier–Stokes, and tangential shear stress equations to model this flow field. Obtain expressions for the liquid velocity profile and the shear stress distribution. Compare the shear stress at the surface of the inner cylinder with that computed from a planar approximation obtained by “unwrapping” the annulus into a plane and assuming a linear velocity profile across the gap. Determine the ratio of cylinder radii for which the planar approximation predicts the correct shear stress at the surface of the inner cylinder within 1 percent.

**Given:** Laminar viscometric flow of liquid in annular gap between vertical concentric cylinders. The inner cylinder is stationary, and the outer cylinder rotates at constant speed.

- Find:**
- Continuity and Navier–Stokes equations simplified to model this flow field.
  - Velocity profile in the annular gap.
  - Shear stress distribution in the annular gap.
  - Shear stress at the surface of the inner cylinder.
  - Comparison with “planar” approximation for constant shear stress in the narrow gap between cylinders.
  - Ratio of cylinder radii for which the planar approximation predicts shear stress within 1 percent of the correct value.

**Solution:**

The geometry and coordinate system used to model the flow field are shown. (The  $z$  coordinate is directed vertically upward; as a consequence,  $g_r = g_\theta = 0$  and  $g_z = -g$ .)





# Estudo Dirigido

The continuity, Navier–Stokes, and tangential shear stress equations (from Appendix B) written for incompressible flow with constant viscosity are

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (v_z) = 0 \quad (\text{B.1})$$

$r$  component:

$$\rho \left( \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) - \rho g_r - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right] \quad (\text{B.3a})$$

$\theta$  component:

$$\rho \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_z}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) - \rho g_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right] \quad (\text{B.3b})$$

$z$  component:

$$\rho \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) - \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] \quad (\text{B.3c})$$

$$\tau_{r\theta} = \mu \left[ r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \quad (\text{B.2})$$



The terms canceled to simplify the basic equations are keyed by number to the assumptions listed below. The assumptions are discussed in the order in which they are applied to simplify the equations.

- Assumptions:**
- (1) Steady flow; angular speed of outer cylinder is constant.
  - (2) Incompressible flow;  $\rho = \text{constant}$ .
  - (3) No flow or variation of properties in the  $z$  direction;  $v_z = 0$  and  $\partial/\partial z = 0$ .
  - (4) Circumferentially symmetric flow, so properties do not vary with  $\theta$ , so  $\partial/\partial\theta = 0$ .

Assumption (1) eliminates time variations in fluid properties.

Assumption (2) eliminates space variations in density.

Assumption (3) causes all terms in the  $z$  component of the Navier–Stokes equation (Eq. B.3c) to cancel, except for the hydrostatic pressure distribution.

After assumptions (3) and (4) are applied, the continuity equation (Eq. B.1) reduces to

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) = 0$$

Because  $\partial/\partial\theta = 0$  and  $\partial/\partial z = 0$  by assumptions (3) and (4), then  $\frac{\partial}{\partial r} \rightarrow \frac{d}{dr}$ , so integrating gives

$$r v_r = \text{constant}$$

Since  $v_r$  is zero at the solid surface of each cylinder, then  $v_r$  must be zero everywhere.

The fact that  $v_z = 0$  reduces the Navier–Stokes equations further, as indicated by cancellations (5). The final equations (Eqs. B.3a and B.3b) reduce to



Integrating again,

$$rv_{\theta} = c_1 \frac{r^2}{2} + c_2 \quad \text{or} \quad v_{\theta} = c_1 \frac{r}{2} + c_2 \frac{1}{r}$$

Two boundary conditions are needed to evaluate constants  $c_1$  and  $c_2$ . The boundary conditions are

$$\begin{array}{lll} v_{\theta} = \omega R_2 & \text{at} & r = R_2 \\ v_{\theta} = 0 & \text{at} & r = R_1 \end{array} \quad \text{and}$$

Substituting

$$\omega R_2 = c_1 \frac{R_2}{2} + c_2 \frac{1}{R_2}$$

$$0 = c_1 \frac{R_1}{2} + c_2 \frac{1}{R_1}$$

After considerable algebra

$$c_1 = \frac{2\omega}{1 - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2} \quad \text{and} \quad c_2 = \frac{-\omega R_1^2}{1 - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2}$$

Substituting into the expression for  $v_{\theta}$ ,

$$v_{\theta} = \frac{\omega r}{1 - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2} - \frac{\omega R_1^2 / r}{1 - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2} = \frac{\omega R_1}{1 - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2} \left[ \frac{r}{R_1} - \frac{R_1}{r} \right] \quad \leftarrow v_{\theta}(r)$$

The shear stress distribution is obtained from Eq. B.2 after using assumption (4):



$$\tau_{\theta} = \mu r \frac{d}{dr} \left( \frac{u_{\theta}}{r} \right) = \mu r \frac{d}{dr} \left\{ \frac{\omega R_1}{1 - \left( \frac{R_1}{R_2} \right)^2} \left[ \frac{1}{R_1} - \frac{R_1}{r^2} \right] \right\} = \mu r \frac{\omega R_1}{1 - \left( \frac{R_1}{R_2} \right)^2} (-2) \left( -\frac{R_1}{r^3} \right)$$

$$\tau_{\theta} = \mu \frac{2\omega R_1^2}{1 - \left( \frac{R_1}{R_2} \right)^2} \frac{1}{r^2} \quad \tau_{\theta}$$

At the surface of the inner cylinder,  $r = R_1$ , so

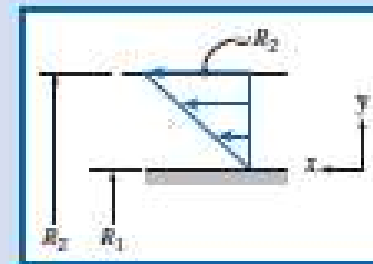
$$\tau_{\text{surface}} = \mu \frac{2\omega}{1 - \left( \frac{R_1}{R_2} \right)^2} \quad \tau_{\text{surface}}$$

For a "planar" gap

$$\tau_{\text{planar}} = \mu \frac{\Delta u}{\Delta y} = \mu \frac{\omega R_2}{R_2 - R_1}$$

or

$$\tau_{\text{planar}} = \mu \frac{\omega}{1 - \frac{R_1}{R_2}} \quad \tau_{\text{planar}}$$





# Estudo Dirigido

Factoring the denominator of the exact expression for shear stress at the surface gives

$$\tau_{\text{surface}} = \mu \frac{2\omega}{\left(1 - \frac{R_1}{R_2}\right)\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)} = \mu \frac{\omega}{1 - \frac{R_1}{R_2}} \cdot \frac{2}{1 + \frac{R_1}{R_2}}$$

Thus

$$\frac{\tau_{\text{surface}}}{\tau_{\text{planar}}} = \frac{2}{1 + \frac{R_1}{R_2}}$$

For 1 percent accuracy,

$$1.01 = \frac{2}{1 + \frac{R_1}{R_2}}$$

or

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{1}{1.01}(2 - 1.01) = 0.980 \frac{R_1}{R_2}$$

The accuracy criterion is met when the gap width is less than 2 percent of the cylinder radius.

## Notes:

- ✓ This problem illustrates how the full Navier-Stokes equations in cylindrical coordinates (Eqs. 8.1 to 8.3) can sometimes be reduced to a set of solvable equations.
- ✓ As in Example 5.9, after integration of the simplified equations, boundary (or initial) conditions are used to complete the solution.
- ✓ Once the velocity field is obtained, other useful quantities (in this problem, shear stress) can be found.
- 📌 The Excel workbook for this problem compares the viscometer and linear velocity profiles. It also allows one to derive the appropriate value of the viscometer outer radius to meet a prescribed accuracy of the planar approximation. We will discuss the concentric cylinder-infinite parallel plates approximation again in Chapter 8.





## Estudo Dirigido Atividade em grupo (em sala)

**Exemplo 42** – Considere um fluido de  $\rho$ ,  $\mu$  constantes entre dois cilindros concêntricos, como mostrado esquematicamente na figura 48.

Encontre a velocidade  $v_\theta$  quando o cilindro interno é fixo e o cilindro externo gira a uma velocidade angular  $\Omega_i$ .

### *Hipóteses de trabalho*

- (i) Regime permanente
- (ii) Escoamento desenvolvido, laminar e unidimensional
- (iii) Ação do campo gravitacional desprezada
- (iv) Fluido incompressível e viscosidade invariante

Observamos que  $v_\theta$  não varia com  $\theta$ . Como  $v_r = 0$  nos cilindros externo e interno, concluímos que  $v_r = 0$  em todos os pontos e o movimento só pode ser circular, isto é,

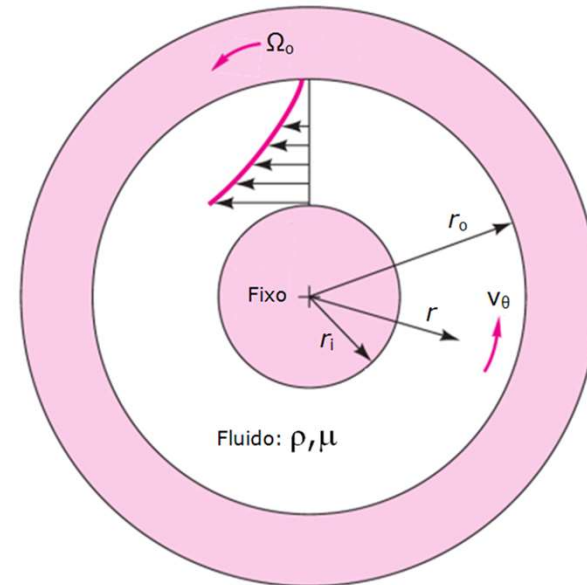


Figura 48 – Exemplo 42



$$v_{\theta} = v_{\theta}(r).$$

As equações de Navier-Stokes tornam-se, com as condições estabelecidas acima, teremos que

$$= \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv_{\theta}}{dr} \right) = C_1$$

$$v_{\theta} = C_1 r + \frac{C_2}{r}$$

*Condições de Contorno*

$$r = r_i \Rightarrow v_{\theta} = 0$$

$$r = r_o \Rightarrow v_{\theta} = \Omega_0 r_o$$

$$\begin{cases} 0 = C_1 r_i + \frac{C_2}{r_i} \\ \Omega_0 r_o = C_1 r_o + \frac{C_2}{r_o} \end{cases}$$

$$v_{\theta} = \Omega_0 r_o \begin{bmatrix} \frac{r}{r_i} - \frac{r_i}{r} \\ \frac{r_o}{r_o} - \frac{r_i}{r_o} \end{bmatrix}$$

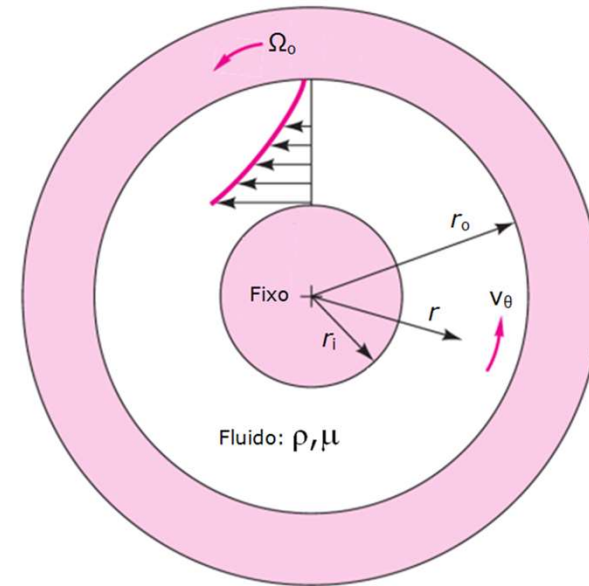


Figura 48 - Exemplo 42



## Estudo Dirigido Atividade em grupo (em sala)

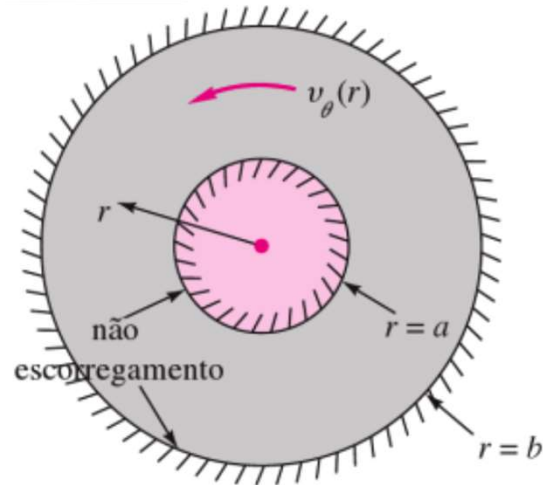


Figura 49 – Exemplo 43

**Exemplo 43** – Das equações de Navier-Stokes para escoamento incompressível em coordenadas polares, encontre o caso mais geral de movimento puramente circulatório,  $v_\theta = v_\theta(r)$ ,  $v_r = v_z = 0$ , para o escoamento sem escorregamento entre dois cilindros concêntricos fixos, como ilustrado na fig. 49.

### *Hipóteses de trabalho*

- (i) Regime permanente
- (ii) Escoamento desenvolvido, laminar e unidimensional
- (iii) Ação do campo gravitacional desprezada
- (iv) Fluido incompressível e viscosidade invariante

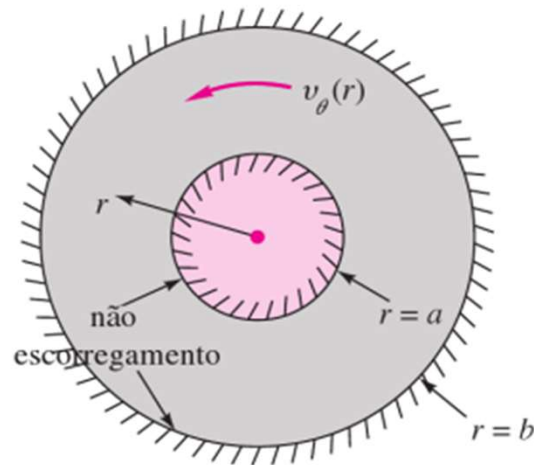


Figura 49 - Exemplo 43

Observamos que  $v_\theta$  não varia com  $\theta$ :  $v_\theta = v_\theta(r)$ .  
As equações de Navier-Stokes tornam-se, com as condições estabelecidas acima, teremos que

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv_\theta}{dr} \right) = 0$$

que é uma EDO linear de 2ª ordem cuja solução é

$$v_\theta = C_1 r + \frac{C_2}{r}$$

*Condições de Contorno - Cilindros*

externo  $r = b \Rightarrow v_\theta(b) = 0$

interno  $r = a \Rightarrow v_\theta(a) = 0$

$$\begin{cases} 0 = C_1 b + \frac{C_2}{b} \\ 0 = C_1 a + \frac{C_2}{a} \end{cases} \Rightarrow C_1 = C_2 = 0 \Rightarrow v_\theta = 0$$

ou seja, não é possível movimento permanente entre cilindros (paredes) fixas.



## Importante! Lista de Exercícios

Como reforço do aprendizado do conteúdo apresentado em sala de aula, são sugeridos os exercícios dispostos na lista abaixo. Bom estudo!

Exercícios Fox - 4ed									
<b>Capítulo 5</b>									
Exercícios FOX 4ED	5.1	5.2	5.3	5.4	5.5	5.41	5.56	5.57	

Exercícios Fox - 8ed									
<b>Capítulo 5</b>									
Exercícios FOX 8ED	5.1	5.2	5.3	5.4		5.41	5.66	5.68	

# Apêndice A

## Propriedades Gerais

Tabela A.1 Fatores de Conversão	
<b>Aceleração da gravidade</b>	
$g = 9,806\ 65\ \text{m/s}^2$	$g = 32,174\ 05\ \text{ft/s}^2$
<b>Área (A)</b>	
$1\ \text{mm}^2 = 1,0 \times 10^{-6}\ \text{m}^2$	$1\ \text{ft}^2 = 144\ \text{in}^2$
$1\ \text{cm}^2 = 1,0 \times 10^{-4}\ \text{m}^2 = 0,1550\ \text{in}^2$	$1\ \text{in}^2 = 6,4516\ \text{cm}^2 = 6,4516 \times 10^{-4}\ \text{m}^2$
$1\ \text{m}^2 = 10,7639\ \text{ft}^2$	$1\ \text{ft}^2 = 0,092\ 903\ \text{m}^2$
<b>Calor específico (<math>C_p</math>, <math>C_v</math>, <math>C</math>), entropia específica(s)</b>	
$1\ \text{kJ}/(\text{kg}\cdot\text{K}) = 0,238\ 846\ \text{Btu}/(\text{lbm}\cdot^\circ\text{R})$	$1\ \text{Btu}/(\text{lbm}\cdot^\circ\text{R}) = 4,1868\ \text{kJ}/(\text{kg}\cdot\text{K})$
<b>Coefficiente de transferência de calor</b>	
$1\ \text{W}/\text{m}^2\cdot\text{K} = 0,176\ 11\ \text{Btu}/(\text{h}\cdot\text{ft}^2\cdot^\circ\text{R})$	$1\ \text{Btu}/(\text{h}\cdot\text{ft}^2\cdot^\circ\text{R}) = 5,678\ 26\ \text{W}/\text{m}^2\cdot\text{K}$
<b>Comprimento</b>	
$1\ \text{mm} = 0,001\ \text{m} = 0,1\ \text{cm}$	$1\ \text{ft} = 12\ \text{in}$
$1\ \text{cm} = 0,01 = 10\ \text{mm} = 0,3937\ \text{in}$	$1\ \text{in} = 2,54\ \text{cm} = 0,0254\ \text{m}$
$1\ \text{m} = 3,280\ 84\ \text{ft} = 39,370\ \text{in}$	$1\ \text{ft} = 0,3048\ \text{m}$
$1\ \text{km} = 0,621\ 371\ \text{mi}$	$1\ \text{mi} = 1,609\ 344\ \text{km}$
$1\ \text{mi} = 1609,3\ \text{m (US statute)}$	$1\ \text{yd} = 0,9144\ \text{m}$
<b>Condutividade térmica</b>	
$1\ \text{W}/\text{m}\cdot\text{K} = 1\ \text{J}/\text{s}\cdot\text{m}\cdot\text{K} = 0,577\ 789\ \text{Btu}/(\text{h}\cdot\text{ft}\cdot^\circ\text{R})$	$1\ \text{Btu}/(\text{h}\cdot\text{ft}\cdot^\circ\text{R}) = 1,730\ 735\ \text{W}/\text{m}\cdot\text{K}$
<b>Constante universal dos gases</b>	
$\bar{R} = N_A k = 8,314\ 51\ \text{kJ}/\text{kmol}\cdot\text{K}$	$\bar{R} = 1,985\ 89\ \text{Btu}/(\text{lbmol}\cdot^\circ\text{R})$
$= 1,985\ 89\ \text{kcal}/\text{kmol}\cdot\text{K}$	$= 1545,36\ \text{lbg}\cdot\text{ft}/(\text{lbmol}\cdot^\circ\text{R})$
$= 82,0578\ \text{atm}\cdot\text{L}/\text{kmol}\cdot\text{K}$	$= 0,730\ 24\ \text{atm}\cdot\text{ft}^3/\text{lbmol}\cdot^\circ\text{R}$
	$= 10,7317\ (\text{lbg}/\text{in}^2)\cdot\text{ft}^3/\text{lbmol}\cdot^\circ\text{R}$

<b>Energia</b>	
$1\ \text{J} = 1\ \text{N}\cdot\text{m} = 1\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^2$	$1\ \text{lb}\cdot\text{ft} = 1,355818$
$1\ \text{J} = 0,737\ 562\ \text{lb}\cdot\text{ft}$	$\text{J} = 1,285\ 07 \times 10^{-3}\ \text{Btu}$
$1\ \text{cal (Int.)} = 4,186\ 81\ \text{J}$	
$1\ \text{erg} = 1,0 \times 10^{-7}\ \text{J}$	$1\ \text{Btu (Int.)} = 1,055\ 056\ \text{kJ}$
$1\ \text{eV} = 1,602\ 177\ 33 \times 10^{-19}\ \text{J}$	$= 778,1693\ \text{lb}\cdot\text{ft}$
<b>Energia específica (e, u)</b>	
$1\ \text{kJ}/\text{kg} = 0,429\ 92\ \text{Btu}/\text{lbm}$	$1\ \text{Btu}/\text{lbm} = 2,326\ \text{kJ}/\text{kg}$
$= 334,55\ \text{lb}\cdot\text{ft}/\text{lbm}$	$1\ \text{lb}\cdot\text{ft}/\text{lbm} = 2,989\ 07 \times 10^{-3}\ \text{kJ}/\text{kg}$
	$= 1,285\ 07 \times 10^{-3}\ \text{Btu}/\text{lbm}$
<b>Energia cinética específica (<math>1/2 V^2</math>)</b>	
$1\ \text{m}^2/\text{s}^2 = 0,001\ \text{kJ}/\text{kg}$	$1\ \text{ft}^2/\text{s}^2 = 3,9941 \times 10^{-5}\ \text{Btu}/\text{lbm}$
$1\ \text{kJ}/\text{kg} = 1000\ \text{m}^2/\text{s}^2$	$1\ \text{Btu}/\text{lbm} = 250,37\ \text{ft}^2/\text{s}^2$
<b>Energia potencial específica (Zg)</b>	
$1\ \text{m} - \text{gstd} = 9,806\ 65 \times 10^{-3}\ \text{kJ}/\text{kg}$	$1\ \text{ft} - \text{gstd} = 1,0\ \text{lb}\cdot\text{ft}/\text{lbm}$
$= 4,216\ 07 \times 10^{-3}\ \text{Btu}/\text{lbm}$	$= 0,001\ 285\ \text{Btu}/\text{lbm}$
	$= 0,002\ 989\ \text{kJ}/\text{kg}$
<b>Fluxo de calor</b>	
$1\ \text{W}/\text{m}^2 = 0,316\ 998\ \text{Btu}/(\text{h}\cdot\text{ft}^2)$	$1\ \text{Btu}/(\text{h}\cdot\text{ft}^2) = 3,154\ 59\ \text{W}/\text{m}^2$
<b>Força (F)</b>	
$1\ \text{N} = 0,224\ 809\ \text{lb}$	$1\ \text{lb} = 4,448\ 222\ \text{N}$
$1\ \text{kgf} = 9,806\ 65\ \text{N (1 kgf)}$	
<b>Massa</b>	
$1\ \text{kg} = 2,204\ 623\ \text{lbm}$	$1\ \text{lbm} = 0,453\ 592\ \text{kg}$
$1\ \text{ton} = 1000\ \text{kg}$	$1\ \text{slug} = 14,5939\ \text{kg}$
$1\ \text{grain} = 6,479\ 89 \times 10^{-5}\ \text{kg}$	$1\ \text{ton} = 2000\ \text{lbm}$
<b>Massa específica</b>	
$1\ \text{kg}/\text{m}^3 = 0,062\ 427\ 97\ \text{lbm}/\text{ft}^3$	$1\ \text{lbm}/\text{ft}^3 = 16,018\ 46\ \text{kg}/\text{m}^3$
$1\ \text{g}/\text{cm}^3 = 1000\ \text{kg}/\text{m}^3$	
$1\ \text{g}/\text{cm}^3 = 1\ \text{kg}/\text{L}$	
<b>Momento (Torque, T)</b>	
$1\ \text{N}\cdot\text{m} = 0,737\ 562\ \text{lbm}\cdot\text{ft}$	$1\ \text{lbm}\cdot\text{ft} = 1,355\ 818\ \text{N}\cdot\text{m}$
<b>Potência (<math>\dot{Q}</math>, <math>\dot{W}</math>)</b>	
$1\ \text{W} = 1\ \text{J}/\text{s} = 1\ \text{N}\cdot\text{m}/\text{s}$	$1\ \text{lb}\cdot\text{ft}/\text{s} = 1,355\ 818\ \text{W}$
$= 0,737\ 562\ \text{lb}\cdot\text{ft}/\text{s}$	$= 4,626\ 24\ \text{Btu}/\text{h}$
$1\ \text{kW} = 3412,14\ \text{Btu}/\text{h}$	$1\ \text{Btu}/\text{s} = 1,055\ 056\ \text{kW}$
$1\ \text{hp (métrico)} = 0,735\ 499\ \text{kW}$	$1\ \text{hp (UK)} = 0,7457\ \text{kW}$
$1\ \text{ton de refrigeração} = 3,516\ 85\ \text{kW}$	$= 550\ \text{lb}\cdot\text{ft}/\text{s}$
	$= 2544,43\ \text{Btu}/\text{h}$
	$1\ \text{ton de refrigeração} = 12\ 000\ \text{Btu}/\text{h}$

Pressão (P)	
1 Pa = 1 N/m <sup>2</sup> = 1 kg/m·s <sup>2</sup>	1 lbf/in <sup>2</sup> = 6,894 757 kPa
1 bar = 1,0 × 10 <sup>5</sup> Pa = 100 kPa	
1 atm = 101,325 kPa	1 atm = 14,695 94 lbf/in <sup>2</sup>
= 1,013 25 bar	= 29 921 in Hg [32 °F]
= 760 mm Hg [0 °C]	= 33,8995 ft H <sub>2</sub> O [4 °C]
= 10,332 56 m H <sub>2</sub> O [4 °C]	
1 torr = 1 mm Hg [0 °C]	
1 mm Hg [0 °C] = 0,133 322 kPa	1 in Hg [0 °C] = 0,491 15 lbf/in <sup>2</sup>
1 m H <sub>2</sub> O [4 °C] = 0,806 38 kPa	1 in H <sub>2</sub> O [4 °C] = 0,0361 26 lbf/in <sup>2</sup>
Quantidade de movimento (mV)	
1 kg·m/s = 7,232 94 lbf·ft/s	1 lbf·ft/s = 0,138 256 kg·m/s
= 0,224 809 lbf·s	
Temperatura (T)	
1 K = 1 °C = 1,8 R = 1,8 F	1 R = (5/9) K
TC = TK - 273,15	TF = TR - 459,67
= (TF - 32)/1,8	= 1,8 TC + 32
TK = TR/1,8	TR = 1,8 TK
Velocidade (V)	
1 m/s = 3,6 km/h	1 ft/s = 0,681 818 m/h
= 3,280 84 ft/s	= 0,3048 m/s
= 2,236 94 mi/h	= 1,097 28 km/h
1 km/h = 0,277 78 m/s	1 mi/h = 1,466 67 ft/s
= 0,911 34 ft/s	= 0,447 04 m/s
= 0,621 37 mi/h	= 1,609 344 km/h
Volume específico (V)	
1 cm <sup>3</sup> /g = 0,001 m <sup>3</sup> /kg	
1 cm <sup>3</sup> /g = 1 L/kg	
1 m <sup>3</sup> /kg = 161 846 ft <sup>3</sup> /lbm	1 ft <sup>3</sup> /lbm = 0,062 428 m <sup>3</sup> /kg
Volume (V)	
1 m <sup>3</sup> = 35,3147 ft <sup>3</sup>	1 ft <sup>3</sup> = 2,831 685 × 10 <sup>-2</sup> m <sup>3</sup>
1 L = 1 dm <sup>3</sup> = 0,001 m <sup>3</sup>	1 in. <sup>3</sup> = 1,6387 × 10 <sup>-5</sup> m <sup>3</sup>
1 Gal (US) = 3,785 412 L	1 Gal (UK) = 4,546 090 L
= 3,785 412 × 10 <sup>-3</sup> m <sup>3</sup>	1 Gal (US) = 231,00 in. <sup>3</sup>

Tabela A.2

Constantes críticas

Substância	Fórmula	Peso molecular	Temperatura K	Pressão MPa	Volume m <sup>3</sup> /kg
Amônia	NH <sub>3</sub>	17,031	405,5	11,35	0,00426
Argônio	Ar	39,948	150,8	4,87	0,00188
Bromo	Br <sub>2</sub>	159,808	588	10,30	0,000796
Dióxido de carbono	CO <sub>2</sub>	44,01	304,1	7,38	0,00212
Monóxido de carbono	CO	28,01	132,9	3,50	0,00333
Cloro	Cl <sub>2</sub>	70,906	416,9	7,98	0,00175
Fúor	F <sub>2</sub>	37,997	144,3	5,22	0,00174
Hélio	He	4,003	145,19	0,227	0,0143
Hidrogênio (normal)	H <sub>2</sub>	2,016	33,2	1,30	0,0323
Criptônio	Kr	83,80	209,4	5,50	0,00109
Neônio	Ne	20,183	44,4	2,76	0,00206
Óxido nítrico	NO	30,006	180	6,48	0,00192
Nitrogênio	N <sub>2</sub>	28,013	126,2	3,39	0,0032
Dióxido de nitrogênio	NO <sub>2</sub>	46,006	431	10,1	0,00365
Óxido nítrico	N <sub>2</sub> O	44,013	308,6	7,24	0,00221
Oxigênio	O <sub>2</sub>	31,999	154,6	5,04	0,00229
Dióxido de enxofre	SO <sub>2</sub>	64,063	430,8	7,88	0,00191
Água	H <sub>2</sub> O	18,015	647,3	22,12	0,00317
Xenônio	Xe	131,30	289,7	5,84	0,000902
Acetileno	C <sub>2</sub> H <sub>2</sub>	26,038	308,3	6,14	0,00433
Benzeno	C <sub>6</sub> H <sub>6</sub>	78,114	562,2	4,89	0,00332
n-Butano	C <sub>4</sub> H <sub>10</sub>	58,124	425,2	3,80	0,00439
Difluorocloroetano (142b)	CH <sub>2</sub> ClCF <sub>2</sub>	100,495	410,3	4,25	0,00230
Difluoroclorometano (22)	CHClF <sub>2</sub>	86,469	369,3	4,97	0,00191
Diclorofluoreetano (141)	CH <sub>2</sub> Cl <sub>2</sub> F	116,95	481,5	4,54	0,00215
Diclorotetrafluoreetano (123)	CHCl <sub>2</sub> CF <sub>3</sub>	152,93	456,9	3,66	0,00182
Difluoreetano (152a)	CHF <sub>2</sub> CH <sub>3</sub>	66,05	386,4	4,52	0,00272
Difluorometano (32)	CF <sub>2</sub> H <sub>2</sub>	52,024	351,3	5,78	0,00236
Etano	C <sub>2</sub> H <sub>6</sub>	30,070	305,4	4,88	0,00493
Álcool etílico (etanol)	C <sub>2</sub> H <sub>5</sub> OH	46,069	513,9	6,14	0,00363
Etileno	C <sub>2</sub> H <sub>4</sub>	28,054	282,4	5,04	0,00465
n-Heptano	C <sub>7</sub> H <sub>16</sub>	100,205	540,3	2,74	0,00431
n-Hexano	C <sub>6</sub> H <sub>14</sub>	86,178	507,5	3,01	0,00429
Metano	CH <sub>4</sub>	16,043	190,4	4,60	0,00615
Álcool metílico (metanol)	CH <sub>3</sub> OH	32,042	512,6	8,09	0,00368
n-Octano	C <sub>8</sub> H <sub>18</sub>	114,232	568,8	2,49	0,00431
Pentafluoreetano (125)	CHF <sub>2</sub> CF <sub>3</sub>	120,022	339,2	3,62	0,00176
n-Pentano	C <sub>5</sub> H <sub>12</sub>	72,151	469,7	3,37	0,00421
Propano	C <sub>3</sub> H <sub>8</sub>	44,094	369,8	4,25	0,00454
Propeno	C <sub>3</sub> H <sub>6</sub>	42,081	364,9	4,60	0,00430
Refrigerante misto	R-410a	72,585	344,5	4,90	0,00218
Tetrafluoreetano (134a)	CF <sub>3</sub> CH <sub>2</sub> F	102,03	374,2	4,06	0,00197



Tabela A.3

Propriedades de alguns sólidos a 25 °C

Sólido	$\rho$ , (kg/m <sup>3</sup> )	$C_p$ , (kJ/kg K)
Acrílico	1180	1,44
Areia (seca)	1500	0,8
Astato	2120	0,92
Borracha (maia)	1100	1,67
Carbono, diamante	3250	0,51
Carbono, grafite	2000-2500	0,61
Carvão	1200-1500	1,26
Concreto	2200	0,88
Gelo (0 °C)	917	2,04
Granito	2750	0,89
Lã	100	1,72
Lã de vidro	20	0,66
Madeira dura	720	1,26
Madeira mole (pinho)	510	1,38
Neve, firme	560	2,1
Papel	700	1,2
Poliestireno	920	2,3
PVC	1380	0,96
Sal, rocha	2100-2500	0,92
Silício	2330	0,70
Tijolo (comum)	1800	0,84
Vidro	2500	0,80
<b>Metais</b>		
Aço (AISI304)	7820	0,46
Alumínio	2700	0,90
Chumbo	113 40	0,13
Cobre comercial	8300	0,42
Estanho	7304	0,22
Ferro fundido	7272	0,42
Latão, 60-40	8400	0,38
Magnésio, 2% Mn	1778	1,00
Níquel, 10% Cr	8666	0,44
Ouro	193 00	0,13
Prata, 99,9% Ag	105 24	0,24
Sódio	971	1,21
Tungstênio	193 00	0,13
Zinco	7144	0,39

Tabela A.4

Propriedades de alguns líquidos a 25 °C

Líquido	$\rho$ , kg/m <sup>3</sup>	$C_p$ , kJ/kg K
Água	4,18	997
Amônia	4,84	604
Benzano	1,72	879
Butano	2,47	556
CCL <sub>4</sub>	0,83	1584
CO <sub>2</sub>	2,9	680
Etanol	2,46	783
Gasolina	2,08	750
Glicerina	2,42	1260
Metanol	2,55	787
n-Octano	2,23	692
Óleo (leve)	1,8	910
Óleo de motor	1,9	885
Propano	2,54	510
Querosene	2,0	815
R-12	0,97	1310
R-125	1,41	1191
R-134a	1,43	1206
R-22	1,26	1190
R-32	1,94	961
R-410a	1,69	1059
<b>Metais líquidos</b>		
Bismuto, Bi	100 40	0,14
Chumbo, Pb	106 60	0,16
Estanho, Sn	6950	0,24
Mercúrio, Hg	135 80	0,14
Na K (56/44)	887	1,13
Potássio, K	828	0,81
Sódio, Na	929	1,38
Zinco, Zn	6570	0,50

\* Ou à temperatura de fusão, caso seja maior que 25 °C.

Tabela A.5

Propriedades de vários gases ideais a 25 °C e 100 kPa\*

Gás	Fórmula química	Peso molecular	R kJ/kg K	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	$C_{p0}$ kJ/kg K	$C_{v0}$ kJ/kg K	$k = C_p/C_v$
Acetileno	C <sub>2</sub> H <sub>2</sub>	26,038	0,3193	1,05	1,699	1,380	1,231
Água (vapor)	H <sub>2</sub> O	18,015	0,4615	0,0231	1,872	1,410	1,327
Ar		28,97	0,287	1,169	1,004	0,717	1,400
Amônia	NH <sub>3</sub>	17,031	0,4882	0,694	2,130	1,642	1,297
Argônio	Ar	39,948	0,2081	1,613	0,520	0,312	1,667
Butano	C <sub>4</sub> H <sub>10</sub>	58,124	0,1430	2,407	1,716	1,573	1,091
Dióxido de Carbono	CO <sub>2</sub>	44,01	0,1899	1,775	0,842	0,653	1,289
Monóxido de Carbono	CO	28,01	0,2968	1,13	1,041	0,744	1,399
Etano	C <sub>2</sub> H <sub>6</sub>	30,07	0,2785	1,222	1,766	1,490	1,186
Etanol	C <sub>2</sub> H <sub>5</sub> OH	46,069	0,1805	1,883	1,427	1,246	1,145
Etileno	C <sub>2</sub> H <sub>4</sub>	28,054	0,2964	1,138	1,548	1,252	1,237
Hélio	He	4,003	2,0771	0,1615	5,193	3,116	1,667
Hidrogênio	H <sub>2</sub>	2,016	4,1243	0,0813	14,209	10,085	1,409
Metano	CH <sub>4</sub>	16,043	0,5183	0,648	2,254	1,736	1,299
Metanol	CH <sub>3</sub> OH	32,042	0,2595	1,31	1,405	1,146	1,227
Neônio	Ne	20,183	0,4120	0,814	1,03	0,618	1,667
Nitrogênio	N <sub>2</sub>	28,013	0,2968	1,13	1,042	0,745	1,400
Óxido nítrico	NO	30,006	0,2771	1,21	0,993	0,716	1,387
Óxido nítrico	N <sub>2</sub> O	44,013	0,1899	1,775	0,879	0,690	1,274
n-Octano	C <sub>8</sub> H <sub>18</sub>	114,23	0,07279	0,092	1,711	1,638	1,044
Oxigênio	O <sub>2</sub>	31,999	0,2598	1,292	0,922	0,662	1,393
Propano	C <sub>3</sub> H <sub>8</sub>	44,094	0,1896	1,808	1,679	1,490	1,126
R-12	CCl <sub>2</sub> F <sub>2</sub>	120,914	0,06876	4,98	0,616	0,547	1,126
R-22	CHClF <sub>2</sub>	86,469	0,09616	3,54	0,658	0,562	1,171
R-32	CF <sub>2</sub> H <sub>2</sub>	52,024	0,1598	2,125	0,822	0,662	1,242
R-125	CHF <sub>2</sub> CF <sub>3</sub>	120,022	0,06927	4,918	0,791	0,722	1,097
R-134a	CF <sub>3</sub> CH <sub>2</sub> F	102,03	0,08149	4,20	0,852	0,771	1,106
R-410a		72,585	0,11455	2,967	0,809	0,694	1,165
Dióxido de enxofre	SO <sub>2</sub>	64,059	0,1298	2,618	0,624	0,494	1,263
Trióxido de enxofre	SO <sub>3</sub>	80,053	0,10386	3,272	0,635	0,531	1,196

\* Ou na pressão de saturação, se esta for menor que 100 kPa.

Tabela A.6

Calor específico a pressão constante de vários gases ideais em função da temperatura\*

Gás	Fórmula	$C_{p0} = C_0 + C_1\theta + C_2\theta^2 + C_3\theta^3$ (kJ/kg K)				$\theta = T$ (Kelvin)/1000
		C0	C1	C2	C3	
Acetileno	C <sub>2</sub> H <sub>2</sub>	1,03	2,91	-1,92	0,54	
Água (vapor)	H <sub>2</sub> O	1,79	0,107	0,586	-0,20	
Amônia	NH <sub>3</sub>	1,60	1,4	1,0	-0,7	
Ar		1,05	-0,365	0,85	-0,39	
Argônio	Ar	0,52	0	0	0	
Butano	C <sub>4</sub> H <sub>10</sub>	0,163	5,70	-1,906	-0,049	
Dióxido de carbono	CO <sub>2</sub>	0,45	1,67	-1,27	0,39	
Dióxido de enxofre	SO <sub>2</sub>	0,37	1,05	-0,77	0,21	
Etano	C <sub>2</sub> H <sub>6</sub>	0,18	5,92	-2,31	0,29	
Etanol	C <sub>2</sub> H <sub>5</sub> OH	0,2	4,65	-1,82	0,03	
Etileno	C <sub>2</sub> H <sub>4</sub>	0,136	5,58	-3,0	0,63	
Hélio	He	5,193	0	0	0	
Hidrogênio	H <sub>2</sub>	13,46	4,6	-6,85	3,79	
Metano	CH <sub>4</sub>	1,2	3,25	0,75	-0,71	
Metanol	CH <sub>3</sub> OH	0,66	2,21	0,81	-0,89	
Monóxido de carbono	CO	1,10	-0,46	1,0	-0,454	
Neônio	Ne	1,03	0	0	0	
Nitrogênio	N <sub>2</sub>	1,11	-0,48	0,96	-0,42	
n-Octano	C <sub>8</sub> H <sub>18</sub>	-0,053	6,75	-3,67	0,775	
Óxido nítrico	NO	0,98	-0,031	0,325	-0,14	
Óxido nítrico	N <sub>2</sub> O	0,49	1,65	-1,31	0,42	
Oxigênio	O <sub>2</sub>	0,88	-0,0001	0,54	-0,33	
Propano	C <sub>3</sub> H <sub>8</sub>	-0,096	6,95	-3,6	0,73	
R-12†	CCl <sub>2</sub> F <sub>2</sub>	0,26	1,47	-1,25	0,36	
R-22†	CHClF <sub>2</sub>	0,2	1,87	-1,35	0,35	
R-32†	CF <sub>2</sub> H <sub>2</sub>	0,227	2,27	-0,93	0,041	
R-125†	CHF <sub>2</sub> CF <sub>3</sub>	0,305	1,68	-0,284	0	
R-134a†	CF <sub>3</sub> CH <sub>2</sub> F	0,165	2,81	-2,23	1,11	
Trióxido de enxofre	SO <sub>3</sub>	0,24	1,7	-1,5	0,46	

\* Equações proporcionam resultados válidos na faixa de 260 K a 1200 K.

† Equações aplicáveis para temperaturas de, no máximo, 500 K.

Tabela A.7.1

Propriedades termodinâmicas do ar (gás ideal; pressão de referência para a entropia é 0,1 MPa ou 1 bar)

T (K)	u (kJ/kg)	h (kJ/kg)	s <sup>o</sup> (kJ/kg × K)
200	142,77	200,17	6,46260
220	157,07	220,22	6,55812
240	171,38	240,27	6,64535
260	185,70	260,32	6,72562
280	200,02	280,39	6,79998
290	207,19	290,43	6,83521
298,15	213,04	298,62	6,86305
300	214,36	300,47	6,86926
320	228,73	320,58	6,93413
340	243,11	340,70	6,99515
360	257,53	360,86	7,05276
380	271,99	381,06	7,10735
400	286,49	401,30	7,15926
420	301,04	421,59	7,20875
440	315,64	441,93	7,25607
460	330,31	462,34	7,30142
480	345,04	482,81	7,34499
500	359,84	503,36	7,38692
520	374,73	523,98	7,42736
540	389,69	544,69	7,46642
560	404,74	565,47	7,50422
580	419,87	586,35	7,54084
600	435,10	607,32	7,57638
620	450,42	628,38	7,61090
640	465,83	649,53	7,64448
660	481,34	670,78	7,67717
680	496,94	692,12	7,70903
700	512,64	713,56	7,74010
720	528,44	735,10	7,77044
740	544,33	756,73	7,80008
760	560,32	778,46	7,82905
780	576,40	800,28	7,85740
800	592,58	822,20	7,88514
850	633,42	877,40	7,95207
900	674,82	933,15	8,01581
950	716,76	989,44	8,07667
1000	759,19	1046,22	8,13493
1050	802,10	1103,48	8,19081

Tabela A.7

Propriedades termodinâmicas do ar (continuação)

T (K)	u (kJ/kg)	h (kJ/kg)	s <sup>o</sup> (kJ/kg × K)
1100	845,45	1161,18	8,24449
1150	889,21	1219,30	8,29616
1200	933,37	1277,81	8,34596
1250	977,89	1336,68	8,39402
1300	1022,75	1395,89	8,44046
1350	1067,94	1455,43	8,48539
1400	1113,43	1515,27	8,52891
1450	1159,20	1575,40	8,57111
1500	1205,25	1635,80	8,61208
1550	1251,55	1696,45	8,65185
1600	1298,08	1757,33	8,69051
1650	1344,83	1818,44	8,72811
1700	1391,80	1879,76	8,76472
1750	1438,97	1941,28	8,80039
1800	1486,33	2002,99	8,83516
1850	1533,87	2064,88	8,86908
1900	1581,59	2126,95	8,90219
1950	1629,47	2189,19	8,93452
2000	1677,52	2251,58	8,96611
2050	1725,71	2314,13	8,99699
2100	1774,06	2376,82	9,02721
2150	1822,54	2439,66	9,05678
2200	1871,16	2502,63	9,08573
2250	1919,91	2565,73	9,11409
2300	1968,79	2628,96	9,14189
2350	2017,79	2692,31	9,16913
2400	2066,91	2755,78	9,19586
2450	2116,14	2819,37	9,22208
2500	2165,48	2883,06	9,24781
2550	2214,93	2946,86	9,27308
2600	2264,48	3010,76	9,29790
2650	2314,13	3074,77	9,32228
2700	2363,88	3138,87	9,34625
2750	2413,73	3203,06	9,36980
2800	2463,66	3267,35	9,39297
2850	2513,69	3331,73	9,41576
2900	2563,80	3396,19	9,43818
2950	2613,99	3460,73	9,46025
3000	2664,27	3525,36	9,48198

Tabela A.7.2

Pressões e volumes relativos em função da pressão em processos isotrópicos

T (K)	P <sub>r</sub>	v <sub>r</sub>	T (K)	P <sub>r</sub>	v <sub>r</sub>	T (K)	P <sub>r</sub>	v <sub>r</sub>
200	0,2703	493,47	680	20,784	21,818	1800	1051,05	1,14204
220	0,3770	389,15	700	23,160	20,155	1850	1182,9	1,04294
240	0,5109	313,27	720	25,742	18,652	1900	1327,5	0,95445
260	0,6757	256,58	740	28,542	17,289	1950	1485,8	0,87521
280	0,8756	213,26	760	31,573	16,052	2000	1658,6	0,80410
290	0,9899	195,36	780	34,851	14,925	2050	1847,1	0,74012
298,15	1,0907	182,29	800	38,388	13,897	2100	2052,1	0,68242
300	1,1146	179,49	850	46,468	11,695	2150	2274,8	0,63027
320	1,3972	152,73	900	60,520	9,9169	2200	2516,2	0,58305
340	1,7281	131,20	950	74,815	8,4677	2250	2777,5	0,54020
360	2,1123	113,65	1000	91,651	7,2760	2300	3059,9	0,50124
380	2,5548	99,188	1050	111,35	6,2885	2350	3364,6	0,46576
400	3,0612	87,137	1100	134,25	5,4641	2400	3693,0	0,43338
420	3,6373	77,003	1150	160,73	4,7714	2450	4046,2	0,40378
440	4,2892	68,409	1200	191,17	4,1859	2500	4425,8	0,37669
460	5,0233	61,066	1250	226,02	3,6880	2550	4833,0	0,35185
480	5,8466	54,748	1300	265,72	3,2626	2600	5269,5	0,32903
500	6,7663	49,278	1350	310,74	2,8971	2650	5736,7	0,30805
520	7,7900	44,514	1400	361,62	2,5817	2700	6236,2	0,28872
540	8,9257	40,344	1450	418,89	2,3083	2750	6769,7	0,27089
560	10,182	36,676	1500	483,16	2,0703	2800	7338,7	0,25443
580	11,568	33,436	1550	554,96	1,8625	2850	7945,1	0,23921
600	13,092	30,561	1600	634,97	1,6804	2900	8590,7	0,22511
620	14,766	28,001	1650	723,86	1,52007	2950	9277,2	0,21205
640	16,598	25,713	1700	822,33	1,37858	3000	10007	0,19992
660	18,600	23,662	1750	931,14	1,25330			

Tabela A.8

Propriedades de várias substâncias (gases ideais, entropias a 0,1 x MPa) base mássica

T (K)	Nitrogênio, Diatômico (N <sub>2</sub> ) R = 0,2968 kJ/kg × K M = 28,013 kg/kmol			Oxigênio, Diatômico (O <sub>2</sub> ) R = 0,2598 kJ/kg × K M = 31,999 kg/kmol		
	u (kJ/kg)	h (kJ/kg)	S <sub>T</sub> <sup>0</sup> (kJ/kg × K)	u (kJ/kg)	h (kJ/kg)	S <sub>T</sub> <sup>0</sup> (kJ/kg × K)
200	148,39	207,75	6,4250	129,84	181,81	6,0466
250	185,50	259,70	6,6568	162,41	227,37	6,2499
300	222,63	311,67	6,8463	195,20	273,15	6,4168
350	259,80	363,68	7,0067	228,37	319,31	6,5590
400	297,09	415,81	7,1459	262,10	366,03	6,6838
450	334,57	468,13	7,2692	296,52	413,45	6,7954
500	372,35	520,75	7,3800	331,72	461,63	6,8969
550	410,52	573,76	7,4811	367,70	510,61	6,9903
600	449,16	627,24	7,5741	404,46	560,36	7,0768
650	488,34	681,26	7,6606	441,97	610,86	7,1577
700	528,09	735,86	7,7415	480,18	662,06	7,2336
750	568,45	791,05	7,8176	519,02	713,90	7,3051
800	609,41	846,85	7,8897	558,46	766,33	7,3728
850	650,98	903,26	7,9581	598,44	819,30	7,4370
900	693,13	960,25	8,0232	638,90	872,75	7,4981
950	735,85	1017,81	8,0855	679,80	926,65	7,5564
1000	779,11	1075,91	8,1451	721,11	980,95	7,6121
1100	867,14	1193,62	8,2572	804,80	1090,62	7,7166
1200	957,00	1313,16	8,3612	889,72	1201,53	7,8131
1300	1048,46	1434,31	8,4582	975,72	1313,51	7,9027
1400	1141,35	1556,87	8,5490	1062,67	1426,44	7,9864
1500	1235,50	1680,70	8,6345	1150,48	1540,23	8,0649
1600	1330,72	1805,80	8,7151	1239,10	1654,83	8,1389
1700	1426,89	1931,45	8,7914	1328,49	1770,21	8,2088
1800	1523,90	2058,15	8,8638	1418,63	1886,33	8,2752
1900	1621,66	2185,58	8,9327	1509,50	2003,19	8,3384
2000	1720,07	2313,68	8,9984	1601,10	2120,77	8,3987
2100	1819,08	2442,36	9,0612	1693,41	2239,07	8,4564
2200	1918,62	2571,58	9,1213	1786,44	2358,08	8,5117
2300	2018,63	2701,28	9,1789	1880,17	2477,79	8,5650
2400	2119,08	2831,41	9,2343	1974,60	2598,20	8,6162
2500	2219,93	2961,93	9,2876	2069,71	2719,30	8,6656
2600	2321,13	3092,81	9,3389	2165,50	2841,07	8,7134
2700	2422,66	3224,03	9,3884	2261,94	2963,49	8,7596
2800	2524,50	3355,54	9,4363	2359,01	3086,55	8,8044
2900	2626,62	3487,34	9,4825	2456,70	3210,22	8,8478
3000	2729,00	3619,41	9,5273	2554,97	3334,48	8,8899

Tabela A.8 (continuação)

Propriedades de várias substâncias (gases ideais, entropias a 0,1 x MPa) base mássica

T (K)	Dióxido de carbono (CO <sub>2</sub> ) R = 0,1889 kJ/kg × K M = 44,010 kg/kmol			Água (H <sub>2</sub> O) R = 0,4615 kJ/kg × K M = 18,015 kg/kmol		
	u (kJ/kg)	h (kJ/kg)	S <sub>T</sub> <sup>0</sup> (kJ/kg × K)	u (kJ/kg)	h (kJ/kg)	S <sub>T</sub> <sup>0</sup> (kJ/kg × K)
200	97,49	135,28	4,5439	276,38	368,69	9,7412
250	126,21	173,44	4,7139	345,98	461,36	10,1547
300	157,70	214,38	4,8631	415,87	554,32	10,4936
350	191,78	257,90	4,9972	486,37	647,90	10,7821
400	228,19	303,76	5,1196	557,79	742,40	11,0345
450	266,69	351,70	5,2325	630,40	838,09	11,2600
500	307,06	401,52	5,3375	704,36	935,12	11,4644
550	349,12	453,03	5,4356	779,79	1033,63	11,6522
600	392,72	506,07	5,5279	856,75	1133,67	11,8263
650	437,71	560,51	5,6151	935,31	1235,30	11,9890
700	483,97	616,22	5,6976	1015,49	1338,56	12,1421
750	531,40	673,09	5,7761	1097,35	1443,49	12,2868
800	579,89	731,02	5,8508	1180,90	1550,13	12,4244
850	629,35	789,93	5,9223	1266,19	1658,49	12,5558
900	679,69	849,72	5,9906	1353,23	1768,60	12,6817
950	730,85	910,33	6,0561	1442,03	1880,48	12,8026
1000	782,75	971,67	6,1190	1532,61	1994,13	12,9192
1100	888,55	1096,36	6,2379	1719,05	2226,73	13,1408
1200	996,64	1223,34	6,3483	1912,42	2466,25	13,3492
1300	1106,68	1352,28	6,4515	2112,47	2712,46	13,5462
1400	1218,38	1482,87	6,5483	2318,89	2965,03	13,7334
1500	1331,50	1614,88	6,6394	2531,28	3223,57	13,9117
1600	1445,85	1748,12	6,7254	2749,24	3487,69	14,0822
1700	1561,26	1882,43	6,8068	2972,35	3756,95	14,2454
1800	1677,61	2017,67	6,8841	3200,17	4030,92	14,4020
1900	1794,78	2153,73	6,9577	3432,28	4309,18	14,5524
2000	1912,67	2290,51	7,0278	3668,24	4591,30	14,6971
2100	2031,21	2427,95	7,0949	3908,08	4877,29	14,8366
2200	2150,34	2565,97	7,1591	4151,28	5166,64	14,9712
2300	2270,00	2704,52	7,2206	4397,56	5459,08	15,1012
2400	2390,14	2843,55	7,2798	4646,71	5754,37	15,2269
2500	2510,74	2983,04	7,3368	4898,49	6052,31	15,3485
2600	2631,73	3122,93	7,3917	5152,73	6352,70	15,4663
2700	2753,10	3263,19	7,4446	5409,24	6655,36	15,5805
2800	2874,81	3403,79	7,4957	5667,86	6960,13	15,6914
2900	2996,84	3544,71	7,5452	5928,44	7266,87	15,7990
3000	3119,18	3685,95	7,5931	6190,86	7575,44	15,9036

**Tabela A.9**

Propriedades de várias substâncias (gases ideais, entropias a  $0,1 \times \text{MPa}$ ) base molar

T (K)	Nitrogênio diatômico ( $N_2$ )		Nitrogênio monatômico (N)	
	$\bar{h}_{f,298}^\circ = 0 \text{ kJ/kmol}$ $M = 28,013 \text{ kg/kmol}$		$\bar{h}_{f,298}^\circ = 472\,680 \text{ kJ/kmol}$ $M = 14,007 \text{ kg/kmol}$	
	$(\bar{h} - \bar{h}_{f,298}^\circ)$ kJ/kmol	$\bar{s}^\circ$ kJ/kmol K	$(\bar{h} - \bar{h}_{f,298}^\circ)$ kJ/kmol	$\bar{s}^\circ$ kJ/kmol K
0	-8670	0	-6197	0
100	-5768	159,812	-4119	130,593
200	-2857	179,985	-2040	145,001
298	0	191,609	0	153,300
300	54	191,789	38	153,429
400	2971	200,181	2117	159,409
500	5911	206,740	4196	164,047
600	8894	212,177	6274	167,837
700	11937	216,865	8353	171,041
800	15046	221,016	10431	173,816
900	18223	224,757	12510	176,265
1000	21463	228,171	14589	178,455
1100	24760	231,314	16667	180,436
1200	28109	234,227	18746	182,244
1300	31503	236,943	20825	183,908
1400	34936	239,487	22903	185,448
1500	38405	241,881	24982	186,883
1600	41904	244,139	27060	188,224
1700	45430	246,276	29139	189,484
1800	48979	248,304	31218	190,672
1900	52549	250,234	33296	191,796
2000	56137	252,075	35375	192,863
2200	63362	255,518	39534	194,845
2400	70640	258,684	43695	196,655
2600	77963	261,615	47860	198,322
2800	85323	264,342	52033	199,868
3000	92715	266,892	56218	201,311
3200	100134	269,286	60420	202,667
3400	107577	271,542	64646	203,948
3600	115042	273,675	68902	205,164
3800	122526	275,698	73194	206,325
4000	130027	277,622	77532	207,437
4400	145078	281,209	86367	209,542
4800	160188	284,495	95457	211,519
5200	175352	287,530	104843	213,397
5600	190572	290,349	114550	215,195
6000	205848	292,984	124590	216,926

**Tabela A.9 (continuação)**

Propriedades de várias substâncias (gases ideais, entropias a  $0,1 \times \text{MPa}$ ) base molar

T (K)	Oxigênio diatômico ( $O_2$ )		Oxigênio monatômico (O)	
	$\bar{h}_{f,298}^\circ = 0 \text{ kJ/kmol}$ $M = 21,999 \text{ kg/kmol}$		$\bar{h}_{f,298}^\circ = 249\,170 \text{ kJ/kmol}$ $M = 16,00 \text{ kg/kmol}$	
	$(\bar{h} - \bar{h}_{f,298}^\circ)$ kJ/kmol	$\bar{s}^\circ$ kJ/kmol K	$(\bar{h} - \bar{h}_{f,298}^\circ)$ kJ/kmol	$\bar{s}^\circ$ kJ/kmol K
0	-8683	0	-6725	0
100	-5777	173,308	-4518	135,947
200	-2868	193,483	-2186	152,153
298	0	205,148	0	161,059
300	54	205,329	41	161,194
400	3027	213,873	2207	167,431
500	6086	220,693	4343	172,198
600	9245	226,450	6462	176,060
700	12499	231,465	8570	179,310
800	15836	235,920	10671	182,116
900	19241	239,931	12767	184,585
1000	22703	243,579	14860	186,790
1100	26212	246,923	16950	188,783
1200	29761	250,011	19039	190,600
1300	33345	252,878	21126	192,270
1400	36958	255,556	23212	193,816
1500	40600	258,068	25296	195,254
1600	44267	260,434	27381	196,599
1700	47959	262,673	29464	197,862
1800	51674	264,797	31547	199,053
1900	55414	266,819	33630	200,179
2000	59176	268,748	35713	201,247
2200	66770	272,366	39878	203,232
2400	74453	275,708	44045	205,045
2600	82225	278,818	48216	206,714
2800	90080	281,729	52391	208,262
3000	98013	284,466	56574	209,705
3200	106022	287,050	60767	211,058
3400	114101	289,499	64971	212,332
3600	122245	291,826	69190	213,538
3800	130447	294,043	73424	214,682
4000	138705	296,161	77675	215,773
4400	155374	300,133	86234	217,812
4800	172240	303,801	94873	219,891
5200	189312	307,217	103592	221,435
5600	206618	310,423	112391	223,066
6000	224210	313,457	121264	224,597

**Tabela A.9 (continuação)**

Propriedades de várias substâncias (gases ideais, entropias a  $0,1 \times \text{MPa}$ ) base molar

T (K)	Dióxido de carbono ( $CO_2$ )		Monóxido de carbono (CO)	
	$\bar{h}_{f,298}^\circ = -393\,522 \text{ kJ/kmol}$ $M = 44,01 \text{ kg/kmol}$		$\bar{h}_{f,298}^\circ = 110\,527 \text{ kJ/kmol}$ $M = 28,01 \text{ kg/kmol}$	
	$(\bar{h} - \bar{h}_{f,298}^\circ)$ kJ/kmol	$\bar{s}^\circ$ kJ/kmol K	$(\bar{h} - \bar{h}_{f,298}^\circ)$ kJ/kmol	$\bar{s}^\circ$ kJ/kmol K
0	-9364	0	-8671	0
100	-6457	179,010	-5772	165,852
200	-3413	199,976	-2860	186,024
298	0	213,794	0	197,651
300	69	214,024	54	197,831
400	4003	225,314	2977	206,240
500	8305	234,902	5932	212,833
600	12906	243,284	8942	218,321
700	17754	250,752	12021	223,067
800	22806	257,496	15174	227,277
900	28030	263,646	18397	231,074
1000	33397	269,299	21686	234,538
1100	38885	274,528	25031	237,726
1200	44473	279,390	28427	240,679
1300	50148	283,931	31867	243,431
1400	55895	288,190	35343	246,006
1500	61705	292,199	38852	248,426
1600	67569	295,984	42388	250,707
1700	73480	299,567	45948	252,866
1800	79432	302,969	49529	254,913
1900	85420	306,207	53128	256,860
2000	91439	309,294	56743	258,716
2200	103562	315,070	64012	262,182
2400	115779	320,384	71326	265,361
2600	128074	325,307	78679	268,302
2800	140435	329,887	86070	271,044
3000	152853	334,170	93504	273,607
3200	165321	338,194	100962	276,012
3400	177836	341,968	108440	278,279
3600	190394	345,576	115938	280,422
3800	202990	348,981	123454	282,454
4000	215624	352,221	130989	284,387
4400	240992	358,266	146108	287,989
4800	266488	363,812	161285	291,290
5200	292112	368,939	176510	294,337
5600	317870	373,711	191782	297,167
6000	343782	378,180	207105	299,809

**Tabela A.9 (continuação)**

Propriedades de várias substâncias (gases ideais, entropias a  $0,1 \times \text{MPa}$ ) base molar

T (K)	Água ( $H_2O$ )		Hidroxila (OH)	
	$\bar{h}_{f,298}^\circ = -241\,826 \text{ kJ/kmol}$ $M = 18,015 \text{ kg/kmol}$		$\bar{h}_{f,298}^\circ = 38\,987 \text{ kJ/kmol}$ $M = 17,007 \text{ kg/kmol}$	
	$(\bar{h} - \bar{h}_{f,298}^\circ)$ kJ/kmol	$\bar{s}^\circ$ kJ/kmol K	$(\bar{h} - \bar{h}_{f,298}^\circ)$ kJ/kmol	$\bar{s}^\circ$ kJ/kmol K
0	-9904	0	-9172	0
100	-6617	152,386	-6140	149,591
200	-3262	175,468	-2975	171,592
298	0	188,835	0	183,709
300	62	189,043	55	183,894
400	3450	198,787	3034	192,466
500	6922	206,532	5991	199,066
600	10499	213,051	8943	204,448
700	14190	218,739	11902	209,008
800	18002	223,626	14881	212,984
900	21937	228,460	17889	216,526
1000	26000	232,739	20935	219,735
1100	30190	236,732	24024	222,680
1200	34506	240,485	27159	225,408
1300	38941	244,035	30340	227,955
1400	43491	247,406	33567	230,347
1500	48149	250,620	36838	232,604
1600	52907	253,690	40151	234,741
1700	57757	256,631	43502	236,772
1800	62693	259,452	46890	238,707
1900	67706	262,162	50311	240,556
2000	72788	264,769	53763	242,328
2200	83153	269,706	60751	245,659
2400	93741	274,312	67840	248,743
2600	104520	278,625	75018	251,614
2800	115463	282,680	82268	254,301
3000	126548	286,504	89585	256,825
3200	137756	290,120	96960	259,205
3400	149073	293,550	104388	261,456
3600	160484	296,812	111864	263,592
3800	171981	299,919	119382	265,625
4000	183552	302,887	126940	267,563
4400	206892	308,448	142165	271,191
4800	230456	313,573	157522	274,531
5200	254216	318,328	173002	277,629
5600	278161	322,764	188598	280,518
6000	302295	326,926	204309	283,227

Tabela A.9 (continuação)

Propriedades de várias substâncias (gases ideais, entropias a 0,1 x MPa) base molar

T (K)	Hidrogênio (H <sub>2</sub> )		Hidrogênio monoatômico (H)	
	$\bar{h}_{f,298}^{\circ}$	$\bar{s}^{\circ}$	$\bar{h}_{f,298}^{\circ}$	$\bar{s}^{\circ}$
	kJ/kmol	kJ/kmol K	kJ/kmol	kJ/kmol K
0	-8467	0	-6197	0
100	-5467	100,727	-4119	92,009
200	-2774	119,410	-2040	106,417
298	0	130,678	0	114,716
300	53	130,856	38	114,845
400	2961	139,219	2117	120,825
500	5883	145,738	4196	125,463
600	8799	151,078	6274	129,253
700	11730	155,609	8353	132,457
800	14681	159,554	10431	135,233
900	17657	163,060	12510	137,681
1000	20663	166,225	14589	139,871
1100	23704	169,121	16667	141,852
1200	26785	171,798	18746	143,661
1300	29907	174,294	20825	145,324
1400	33073	176,637	22903	146,865
1500	36281	178,849	24982	148,299
1600	39533	180,946	27060	149,640
1700	42826	182,941	29139	150,900
1800	46160	184,846	31218	152,089
1900	49532	186,670	33296	153,212
2000	52942	188,419	35375	154,279
2200	59865	191,719	39632	156,260
2400	66915	194,789	43689	158,069
2600	74082	197,659	47847	159,732
2800	81355	200,355	52004	161,273
3000	88725	202,898	56161	162,707
3200	96187	205,306	60318	164,048
3400	103736	207,593	64475	165,308
3600	111367	209,773	68633	166,497
3800	119077	211,856	72790	167,620
4000	126864	213,851	76947	168,687
4400	142658	217,612	85261	170,668
4800	158730	221,109	93576	172,476
5200	175057	224,379	101890	174,140
5600	191607	227,447	110205	175,681
6000	208332	230,322	118519	177,114

Tabela A.9 (continuação)

Propriedades de várias substâncias (gases ideais, entropias a 0,1 x MPa) base molar

T (K)	Óxido nítrico (NO)		Dióxido de nitrogênio (NO <sub>2</sub> )	
	$\bar{h}_{f,298}^{\circ}$	$\bar{s}^{\circ}$	$\bar{h}_{f,298}^{\circ}$	$\bar{s}^{\circ}$
	kJ/kmol	kJ/kmol K	kJ/kmol	kJ/kmol K
0	-9192	0	-10186	0
100	-6073	177,031	-6861	202,563
200	-2951	198,747	-3495	225,852
298	0	210,759	0	240,034
300	55	210,943	68	240,263
400	3040	219,529	3927	251,342
500	6059	226,263	8099	260,638
600	9144	231,886	12555	268,755
700	12308	236,762	17250	275,988
800	15548	241,088	22138	282,513
900	18858	244,985	27180	288,450
1000	22229	248,536	32344	293,889
1100	25653	251,799	37606	298,904
1200	29120	254,816	42946	303,551
1300	32626	257,621	48351	307,876
1400	36164	260,243	53808	311,920
1500	39729	262,703	59309	315,715
1600	43319	265,019	64846	319,289
1700	46929	267,208	70414	322,664
1800	50557	269,282	76008	325,861
1900	54201	271,252	81624	328,898
2000	57859	273,128	87259	331,788
2200	65212	276,632	98578	337,182
2400	72606	279,849	109948	342,128
2600	80034	282,822	121358	346,695
2800	87491	285,585	132800	350,934
3000	94973	288,165	144267	354,890
3200	102477	290,587	155756	358,597
3400	110000	292,867	167262	362,085
3600	117541	295,022	178783	365,378
3800	125099	297,065	190316	368,495
4000	132671	299,007	201860	371,456
4400	147857	302,626	224973	376,963
4800	163094	305,940	248114	381,997
5200	178377	308,998	271276	386,632
5600	193703	311,838	294455	390,926
6000	209070	314,488	317648	394,926

Tabela A.10

Entalpia de formação e entropia absoluta de várias substâncias a 25 °C e 100 kPa

Substância	Fórmula	M	Estado	$\bar{h}_{f,298}^{\circ}$ kJ/kmol	$\bar{s}_{298}^{\circ}$ kJ/kmol K
Acetileno	C <sub>2</sub> H <sub>2</sub>	26,038	gás	+226 731	200,958
Água	H <sub>2</sub> O	18,015	gás	-241 826	188,834
Água	H <sub>2</sub> O	18,015	líquido	-285 830	69,950
Amônia	NH <sub>3</sub>	17,031	gás	-45 720	192,572
Benzeno	C <sub>6</sub> H <sub>6</sub>	78,114	gás	+82 980	269,562
n-Butano	C <sub>4</sub> H <sub>10</sub>	58,124	gás	-126 200	306,647
Carbono (grafita)	C	12,011	sólido	0	5,740
Dióxido de carbono	CO <sub>2</sub>	44,010	gás	-393 522	213,795
Dióxido de enxofre	SO <sub>2</sub>	64,059	gás	-296 842	248,212
Enxofre	S	32,06	sólido	0	32,066
Etileno	C <sub>2</sub> H <sub>4</sub>	30,070	gás	-84 740	229,597
Etilanol	C <sub>2</sub> H <sub>5</sub> OH	46,069	gás	-235 000	282,444
Etilanol	C <sub>2</sub> H <sub>5</sub> OH	46,069	líquido	-277 380	160,554
Etileno	C <sub>2</sub> H <sub>4</sub>	28,054	gás	+52 467	219,330
Heptano	C <sub>7</sub> H <sub>16</sub>	100,205	gás	-187 900	427,805
Hexano	C <sub>6</sub> H <sub>14</sub>	86,178	gás	-167 300	387,979
Metano	CH <sub>4</sub>	16,043	gás	-74 873	186,251
Metanol	CH <sub>3</sub> OH	32,042	gás	-201 300	239,709
Metanol	CH <sub>3</sub> OH	32,042	líquido	-239 220	126,809
Monóxido de carbono	CO	28,011	gás	-110 527	197,653
Nitrometano	CH <sub>3</sub> NO <sub>2</sub>	61,04	líquido	-113 100	171,80
n-Octano	C <sub>8</sub> H <sub>18</sub>	114,232	gás	-208 600	466,514
n-Octano	C <sub>8</sub> H <sub>18</sub>	114,232	líquido	-250 105	360,575
Óxido de Nitrogênio	N <sub>2</sub> O	44,013	gás	+82 050	219,957
Ozônio	O <sub>3</sub>	47,998	gás	+142 674	238,932
Pentano	C <sub>5</sub> H <sub>12</sub>	72,151	gás	-146 500	348,945
Peróxido de hidrogênio	H <sub>2</sub> O <sub>2</sub>	34,015	gás	-136 106	232,991
Propano	C <sub>3</sub> H <sub>8</sub>	44,094	gás	-103 900	269,917
Propeno	C <sub>3</sub> H <sub>6</sub>	42,081	gás	+20 430	267,066
Trióxido de enxofre	SO <sub>3</sub>	80,059	gás	-395 765	256,769
T-T-Diesel	C <sub>14</sub> H <sub>30</sub>	198,06	líquido	-174 000	525,90

Tabela A. 11

Logaritmos na base  $e$  da constante de equilíbrio  $K$ 

Para a reação  $\nu_A A + \nu_B B \rightleftharpoons \nu_C C + \nu_D D$ , a constante de equilíbrio  $K$  é definida por:  $K = \frac{y_C^{\nu_C} y_D^{\nu_D}}{y_A^{\nu_A} y_B^{\nu_B}} \frac{P^{\nu_C + \nu_D - \nu_A - \nu_B}}{P^0}$ ,  $f^0 = 0,1 \text{ MPa}$

Temp K	$\text{H}_2 \rightleftharpoons 2\text{H}$	$\text{O}_2 \rightleftharpoons 2\text{O}$	$\text{N}_2 \rightleftharpoons 2\text{N}$	$2\text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons 2\text{H}_2 + \text{O}_2$	$2\text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{H}_2 + 2\text{OH}$	$2\text{CO}_2 \rightleftharpoons 2\text{CO} + \text{O}_2$	$\text{N}_2 + \text{O}_2 \rightleftharpoons 2\text{NO}$	$\text{N}_2 + 2\text{O}_2 \rightleftharpoons 2\text{NO}_2$
298	-164,003	-186,963	-367,528	-184,420	-212,075	-207,529	-69,868	-41,355
500	-92,830	-105,623	-213,405	-105,385	-120,331	-115,234	-40,449	-30,725
1000	-39,810	-45,146	-99,146	-46,321	-51,951	-47,052	-18,709	-23,039
1200	-30,878	-35,003	-80,025	-36,363	-40,467	-36,736	-15,082	-21,752
1400	-24,467	-27,741	-66,345	-29,222	-32,244	-27,679	-12,491	-20,826
1600	-19,638	-22,282	-56,069	-23,849	-26,067	-21,656	-10,547	-20,126
1800	-15,868	-18,028	-48,066	-19,658	-21,258	-16,987	-9,035	-19,577
2000	-12,841	-14,619	-41,655	-16,299	-17,406	-13,266	-7,825	-19,136
2200	-10,356	-11,826	-36,404	-13,546	-14,253	-10,232	-6,836	-18,773
2400	-8,280	-9,495	-32,023	-11,249	-11,625	-7,715	-6,012	-18,470
2600	-6,519	-7,520	-28,313	-9,303	-9,402	-5,594	-5,316	-18,214
2800	-5,005	-5,826	-25,129	-7,633	-7,496	-3,781	-4,720	-17,994
3000	-3,690	-4,356	-22,367	-6,184	-5,845	-2,217	-4,205	-17,805
3200	-2,538	-3,069	-19,947	-4,916	-4,401	-0,853	-3,755	-17,640
3400	-1,519	-1,932	-17,810	-3,795	-3,128	0,346	-3,369	-17,496
3600	-0,611	-0,922	-15,909	-2,799	-1,996	1,408	-3,008	-17,369
3800	0,201	-0,017	-14,205	-1,906	-0,984	2,355	-2,694	-17,257
4000	0,934	0,799	-12,671	-1,101	-0,074	3,204	-2,413	-17,157
4500	2,483	2,520	-8,423	0,602	1,847	4,985	-1,824	-16,953
5000	3,724	3,898	-6,816	1,972	3,383	6,397	-1,368	-16,797
5500	4,739	5,027	-4,672	3,088	4,639	7,542	-0,980	-16,678
6000	5,587	5,969	-2,876	4,040	5,684	8,488	-0,671	-16,588

Fonte: Consistente com JANAF Thermochemical Tables, 3. ed., Thermal Group, Dow Chemical U.S.A., Mid., MI, 1985.

# Apêndice B

## Equação de Estado



**Tabela D.1**

Equações de estado

Modelo	c	d	b <sub>0</sub>	a <sub>0</sub>
Gás Ideal	0	0	0	0
Van der Waals	0	0	1/8	27/64
Redlich-Kwong	1	0	0,08664	0,42748 (T <sub>r</sub> ) <sup>-1/2</sup>
Soave	1	0	0,08664	0,42748 [1 + f(1 - T <sub>r</sub> <sup>1/2</sup> )] <sup>2</sup>
Peng-Robinson	2	-1	0,0778	0,45724 [1 + f(1 - T <sub>r</sub> <sup>1/2</sup> )] <sup>2</sup>

**Tabela D.3**

Fatores de compressibilidade na saturação líquido-vapor (fluido simples de Lee-Kesler)

Z <sub>r</sub>	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,85	0,90	0,95	1
P <sub>r</sub> <sup>sat</sup>	2,7E-4	4,6E-3	0,028	0,099	0,252	0,373	0,532	0,737	1
Z <sub>r</sub>	6,5E-5	9,5E-4	0,0052	0,017	0,042	0,062	0,090	0,132	0,29
Z <sub>r</sub>	0,999	0,988	0,957	0,897	0,807	0,747	0,673	0,569	0,29

**Tabela D.4**

Fatores acêntricos de algumas substâncias

Substância		ω	Substância		ω
Água	H <sub>2</sub> O	0,344	Hélio	He	-0,365
Amônia	NH <sub>3</sub>	0,25	Metano	CH <sub>4</sub>	0,011
Argônio	Ar	0,001	Neônio	Ne	-0,029
Bromo	Br <sub>2</sub>	0,108	Nitrogênio	N <sub>2</sub>	0,039
n-Butano	C <sub>4</sub> H <sub>10</sub>	0,199	R-32	CF <sub>2</sub> H <sub>2</sub>	0,277
Etano	C <sub>2</sub> H <sub>6</sub>	0,099	R-125	CHF <sub>2</sub> CF <sub>3</sub>	0,305

**Tabela D.2**

Equação de estado de Lee-Kesler

A equação generalizada de estado de Lee-Kesler é:

$$Z = \frac{P_r v_r}{T_r} = 1 + \frac{B}{v_r} + \frac{C}{v_r^2} + \frac{D}{v_r^5} + \frac{c_4}{T_r^3 v_r^2} \beta + \frac{\gamma}{v_r^2} \exp \left( -\frac{\gamma}{v_r^2} \right)$$

$$B = b_1 - \frac{b_2}{T_r} - \frac{b_3}{T_r^2} - \frac{b_4}{T_r^8}$$

$$C = c_1 - \frac{c_2}{T_r} + \frac{c_3}{T_r^3}$$

$$D = d_1 + \frac{d_2}{T_r}$$

em que:

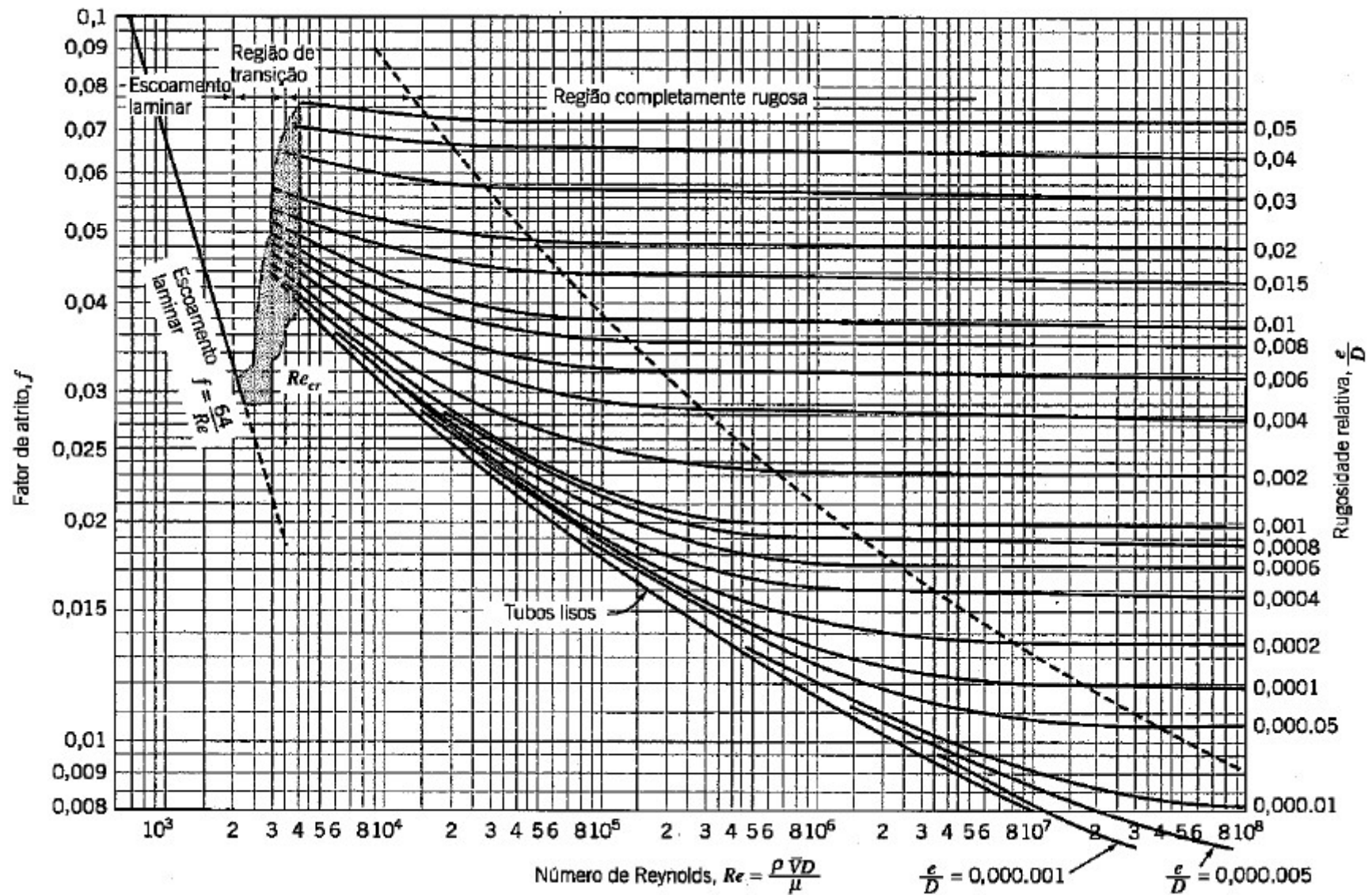
$$T_r = \frac{T}{T_c} \quad P_r = \frac{P}{P_c} \quad v_r = \frac{v}{RT_c/P_c}$$

Os valores das constantes são os seguintes:

Constante	Fluido simples	Constante	Fluido simples
b <sub>1</sub>	0,1181193	c <sub>3</sub>	0,0
b <sub>2</sub>	0,265728	c <sub>4</sub>	0,042724
b <sub>3</sub>	0,154790	d <sub>1</sub> × 10 <sup>4</sup>	0,155488
b <sub>4</sub>	0,030323	d <sub>2</sub> × 10 <sup>4</sup>	0,623689
c <sub>1</sub>	0,0236744	β	0,65392
c <sub>2</sub>	0,0186984	γ	0,060167

# Apêndice C

Diagrama de Moody



## Apêndice D

### **\*\* *Análise Vetorial (Revisão)***

≡ Análise Vetorial



**Importante!**  
Revisão – Análise Vetorial

# Brevíssima Revisão de Análise Vetorial

## 1. O operador diferencial vetorial

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \quad (1)$$

$\nabla$  (*nabla*) não é um vetor, mas sim um operador. Portanto, se  $\phi$  for um campo escalar,  $\phi \nabla$  nada significará, mas  $\nabla \phi$  é conhecido como o *gradiente* de  $\phi$ .

## 2. O operador divergência

Seja uma função vetorial  $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3)$  em que  $f_1, f_2, f_3$  são funções escalares; então seu "produto escalar" com  $\nabla$  será

$$\nabla \cdot \vec{f} = \left( \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \cdot (f_1 \vec{i} + f_2 \vec{j} + f_3 \vec{k})$$

Ou, escrito de forma compacta,

$$\nabla \cdot \vec{f} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) (f_1, f_2, f_3) = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \quad (2)$$

# Brevíssima Revisão de Análise Vetorial

## 3. O operador rotacional

Seja uma função vetorial  $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3)$  em que  $f_1, f_2, f_3$  são funções escalares de classe  $C^1$ , isto é, possuem derivadas primeiras contínuas; então seu produto vetorial com o “vetor” simbólico  $\nabla$  será

$$\nabla \times \vec{f} = \left( \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \times (f_1 \vec{i} + f_2 \vec{j} + f_3 \vec{k})$$

Ou, na forma de determinante,

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) \vec{k} \quad (3)$$

## 4. O operador laplaciano

A divergência do gradiente,  $\nabla \cdot \nabla$  é escrita como  $\nabla^2$ . Então  $\nabla \cdot (\nabla \phi)$  é escrita como

$$\nabla \cdot (\nabla \phi) = \nabla^2 \phi$$

Obs.: Uma função escalar  $\phi$  é dita *harmônica* se for contínua, tiver derivadas segundas contínuas e satisfizer a *equação de Laplace*:

$$\nabla \cdot (\nabla \phi) = \nabla^2 \phi = 0$$



## Exemplo Análise Vetorial

Sejam

$$\begin{cases} \vec{a} = xy\vec{i} + y^2\vec{j} + 2z\vec{k} \\ \vec{b} = x^2\vec{i} - xy\vec{j} + z\vec{k} \\ \phi = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} \end{cases}$$

Calcule

(a)  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  (d)  $\nabla\phi$

(b)  $\vec{a} \times \vec{b}$  (e)  $\nabla \cdot \vec{a}$

(c)  $\frac{\partial \vec{a}}{\partial x}$  (f)  $\nabla \times \vec{b}$

(a)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = (xy, y^2, 2) \cdot (x^2, -xy, z) = x^3y - xy^3 + 2z$

(b)  $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ xy & y^2 & 2 \\ x^2 & -xy & z \end{vmatrix} = (y^2z + 2xy)\vec{i} + (2x^2 - xyz)\vec{j} + (-x^2y^2 - x^2y^2)\vec{k}$

(c)  $\frac{\partial \vec{a}}{\partial x} = y\vec{i}$

(d)  $\nabla\phi = x\vec{i} - y\vec{j}$  (e)  $\nabla \cdot \vec{a} = 3y$  (f)  $\nabla \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & -xy & z \end{vmatrix} = -y\vec{k}$



## Estudo Dirigido Atividade em grupo (em sala)

**Exemplo 2** – Sejam

$$\begin{cases} \vec{c} = xyz\vec{i} + 2\vec{j} + y^2\vec{k} \\ \vec{d} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + x\vec{k} \\ \psi = xy \end{cases}$$

Calcule

(a)  $\vec{c} \cdot \vec{d}$  (d)  $\nabla\psi$

(b)  $\vec{c} \times \vec{d}$  (e)  $\nabla \times \vec{c}$

(c)  $\frac{\partial \vec{c}}{\partial x}$  (f)  $\nabla \cdot \vec{d}$





# Brevíssima Revisão de Análise Vetorial

## 5. Teorema da Divergência (Gauss)

Seja  $V$  uma região tridimensional normal com respeito a cada um dos eixos coordenados e sejam  $P$ ,  $Q$  e  $R$  funções contínuas em  $V$  tais que  $\partial P/\partial x$ ,  $\partial Q/\partial y$  e  $\partial R/\partial z$  sejam contínuas. Logo

$$\iiint_V \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy \quad (4)$$

em que  $S$  é a fronteira de  $V$ . Seja a função vetorial  $\vec{f}$  contínua em  $V$ , limitada pela superfície  $S$ , com componentes  $P$ ,  $Q$  e  $R$ , então

$$\nabla \cdot \vec{f} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

E o *Teorema de Gauss* passa a ser escrito como

$$\iiint_V (\nabla \cdot \vec{f}) dx dy dz = \iint_S (\vec{f} \cdot \vec{n}) ds \quad (5)$$

# Brevíssima Revisão de Análise Vetorial

Aplicação do teorema da divergência - **Teorema do Gradiente**.

Se  $\vec{f} = \phi \vec{a}$  em que  $\phi$  é um escalar e  $\vec{a}$  é um vetor constante, então ao aplicarmos o teorema de Gauss teremos,

$$\iiint_V \nabla \cdot (\phi \vec{a}) dV = \iint_S \phi \vec{a} \cdot d\vec{s} \quad (6)$$

Porém

$$\nabla \cdot (\phi \vec{a}) = \phi \nabla \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \nabla \phi$$

e, como  $\vec{a}$  é um vetor constante,  $\nabla \cdot \vec{a} = 0$

consequentemente,  $\nabla \cdot (\phi \vec{a}) = \vec{a} \cdot \nabla \phi$

Portanto (6) pode ser escrita como  $\vec{a} \iiint_V \nabla \phi dV = \vec{a} \iint_S \phi ds$

$$\iiint_V \nabla \phi dV = \iint_S \phi ds \quad (7)$$

Tendo em vista que  $\vec{a}$  é constante



## Exemplo Teorema da Divergência

**Exemplo 3** – Mostrar que para o vetor posição  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ ,  $\iint_S \vec{r} \cdot d\vec{s} = 3V$

onde  $V$  é o volume da região limitada pela superfície  $S$ . O divergente de  $\vec{r}$  será:

$$\nabla \cdot \vec{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3$$

Aplicando o Teorema de Gauss

$$\iint_S (\vec{r} \cdot \vec{n}) ds = \iiint_V (\nabla \cdot \vec{r}) dx dy dz = \iiint_V 3 dx dy dz = 3V$$

**Exemplo 4** – Usando o Teorema da Divergência, determinar  $\iint_S \vec{r} \cdot d\vec{s}$

para a superfície da esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ .

$$\iint_S \vec{r} \cdot d\vec{s} = \iiint_V (\nabla \cdot \vec{r}) dx dy dz = 3V = 3 \left( \frac{4}{3} \pi a^3 \right)$$

# Brevíssima Revisão de Análise Vetorial

## 6. Vetor Normal e Vetor Unitário Normal

Imaginemos uma curva dada parametricamente por funções deriváveis  $x = x(t)$  e  $y = y(t)$ . Então o ponto  $P(t) = \langle x(t), y(t) \rangle$  estará sempre sobre uma curva de nível  $c_k$ , de modo que

$$F(t) = f\langle x(t), y(t) \rangle = k,$$

ou seja, será sempre igual a  $k$ ,  $\forall t$ . Consequentemente, sua derivada primeira se anula:

$$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx(t)}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy(t)}{dt} = \nabla f \cdot \vec{P}(t) = 0 \quad (8)$$

A expressão acima nos mostra que o gradiente de  $f$ , quando diferente de zero, num certo ponto  $P$ , é sempre perpendicular à direção tangente à curva de nível que passa por  $P$ .



## Exemplo Vetor Normal e Vetor Unitário Normal

**Exemplo 5** – Encontre a curva de nível da superfície  $z = x^2/a + y^2/b$  no ponto  $M(2,3)$  e, em seguida, esboce a curva e o gradiente.

No ponto  $M$ ,  $x=2$  e  $y=3$ . Por isso

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\bigg|_{x=2} = \left(\frac{2}{a}x\right)\bigg|_{x=2} = \frac{4}{a} \text{ e } \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\bigg|_{y=3} = \left(\frac{2}{b}y\right)\bigg|_{y=3} = \frac{6}{b}$$

$$\nabla z|_{M(2,3)} = \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} \right) \left( \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \right) \right] \bigg|_{M(2,3)} = \frac{4}{a} \vec{i} + \frac{6}{b} \vec{j}$$

O *vetor normal* é dado pelas coordenadas do gradiente da superfície que passa pelo ponto  $P_0$ . Em se tratando de uma função de três variáveis,  $f(x, y, z)$ , temos:

$$\frac{d}{dt} f \left[ x(t), y(t), z(t) \right] = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \nabla \tilde{f} \cdot \vec{P}'(t) \quad (9)$$

$$\text{em que } P = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

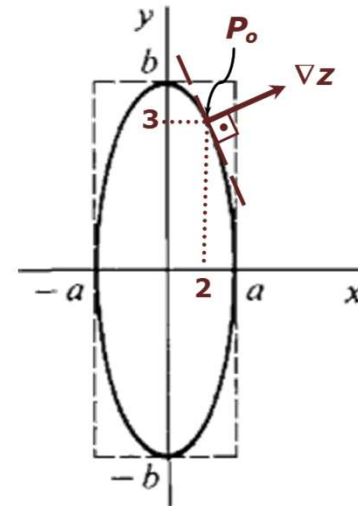


Figura 1  
Exemplo 5



## Exemplo Vetor Normal e Vetor Unitário Normal

**Exemplo 6** – Qual o vetor unitário normal à superfície definida pela função  $f(x, y, z) = 3x^2 + y^2 - 7z = 0$ , no ponto  $P_0(1, -2, 1)$ ?

$$\nabla f = \left( \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) (3x^2 + y^2 - 7z) = 6x\vec{i} + 2y\vec{j} - 7\vec{k}$$

$$\nabla f(1, -2, 1) = (6, -4, -7)$$

Se  $P$  for um ponto genérico do *plano tangente* por  $P_0$ , devemos ter  $(\vec{P} - \vec{P}_0) \cdot \vec{n} = 0$ ,

$$[(x - 1)\vec{i} + (y + 2)\vec{j} + (z - 1)\vec{k}] \cdot [6\vec{i} - 4\vec{j} - 7\vec{k}] = 0$$

$$6(x - 1) - 4(y + 2) - 7(z - 1) = 0 \Rightarrow 6x - 4y - 7z - 7 = 0$$

O *vetor unitário normal* é definido por

$$\vec{n} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \frac{6\vec{i} - 4\vec{j} - 7\vec{k}}{\sqrt{(6)^2 + (-4)^2 + (-7)^2}}$$



## Exemplo Vetor Normal e Vetor Unitário Normal

**Exemplo 7** – Encontre o vetor unitário normal à superfície  $W = x^2y + 2xz = 4$ , no ponto  $(2, -2, 3)$ .

$$\nabla w = \nabla(x^2y + 2xz - 4) = (2xy + 2z)\vec{i} + x^2\vec{j} + 2x\vec{k}$$

$$\nabla w(2, -2, 3) = -2\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}$$

$$\vec{n} = \frac{\nabla w}{|\nabla w|} = \frac{-2\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}}{\sqrt{(-2)^2 + (4)^2 + (4)^2}}$$

Se  $P$  designa um ponto genérico do plano tangente por  $P_0$ , devemos ter

$$(\vec{P} - \vec{P}_0) \cdot \vec{n} = 0, \text{ ou seja, } 6x - 4y - 7z - 7 = 0.$$



## Exemplo Vetor Normal e Vetor Unitário Normal

**Exemplo 8** – Avaliar  $\iint_S (\vec{F} \cdot \vec{n}) ds$  em que  $\vec{F} = 4xz\vec{i} - y^2\vec{j} + yz\vec{k}$   
e  $S$  é a superfície do cubo limitada por  $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0, z = 1$ .

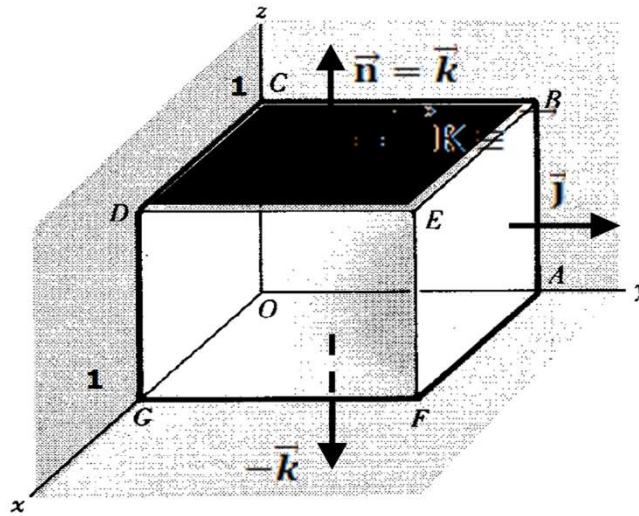


Figura 2 – Exemplo 8





# Exemplo

## Vetor Normal e Vetor Unitário Normal

### Modo 1

$$\iint_{DEFG} (\vec{F} \cdot \vec{n}) ds = \int_0^1 \int_0^1 (4xz\vec{i} - y^2\vec{j} + yz\vec{k}) \cdot \vec{i} dy dz = \int_0^1 \int_0^1 4z dy dz = 2$$

– soma das contribuições em cada face

$$\begin{aligned} \iint_{ABCO} (\vec{F} \cdot \vec{n}) ds &= \int_0^1 \int_0^1 (-y^2\vec{j} + yz\vec{k}) \cdot (-\vec{i}) dy dz = 0 & \iint_{ABEF} (\vec{F} \cdot \vec{n}) ds &= \int_0^1 \int_0^1 (4xz\vec{i} - \vec{j} + z\vec{k}) \cdot \vec{j} dx dz = \int_0^1 \int_0^1 - dx dz = -1 \\ \iint_{OGDC} (\vec{F} \cdot \vec{n}) ds &= \int_0^1 \int_0^1 (4xz\vec{i}) \cdot (-\vec{j}) dx dz = 0 & \iint_{BCDE} (\vec{F} \cdot \vec{n}) ds &= \int_0^1 \int_0^1 (4x\vec{i} - y^2\vec{j} + y\vec{k}) \cdot \vec{k} dx dy = \int_0^1 \int_0^1 y dx dy = \frac{1}{2} \\ \iint_{AFGO} (\vec{F} \cdot \vec{n}) ds &= \int_0^1 \int_0^1 (-y^2\vec{j}) \cdot (-\vec{k}) dx dy = 0 \end{aligned}$$

Somando as contribuições em cada face, teremos:

$$\iint_S (\vec{F} \cdot \vec{n}) ds = 2 + 0 + (-1) + 0 + \frac{1}{2} + 0 = \frac{3}{2}$$



## Exemplo

### Vetor Normal e Vetor Unitário Normal

**Modo 2** – Usando o teorema da divergência, a integral requerida é igual a

$$\begin{aligned}\iiint_V (\nabla \cdot \vec{f}) dV &= \iiint_V \left[ \frac{\partial}{\partial x} (4xz) + \frac{\partial}{\partial y} (-y^2) + \frac{\partial}{\partial z} (yz) \right] dV \\ &= \iiint_V [4z - 2y + y] dV = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (4z - y) dz dy dx \\ &= \int_0^1 \int_0^1 [2z^2 - yz] \Big|_{z=0}^1 dy dx = \int_0^1 \int_0^1 (2 - y) dy dx \\ &= \int_0^1 \left( 2y - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{y=0}^1 dx = \int_0^1 \left( 2 - \frac{1}{2} \right) dx\end{aligned}$$

# Brevíssima Revisão de Análise Vetorial

## 6. Teorema de Stokes

Estabelece que se  $S$  é uma superfície limitada pela curva simples fechada  $C$  e  $\vec{f}$  é uma função vetorial que tem derivadas parciais primeiras contínuas em  $S$  e  $C$ , então

$$\iint_S (\nabla \times \vec{f}) \cdot \vec{n} ds = \oint_C \vec{f} \cdot d\vec{r} \quad (11)$$

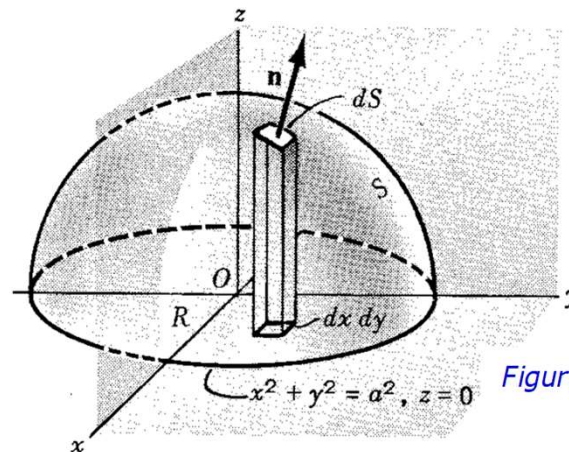


Figura 6 - Exemplo 12



## Exemplo Teorema de Stokes

**Exemplo 12** - Verificar o teorema de Stokes, para  $\vec{A} = \langle [2x - y], [-yz^2], [-y^2z] \rangle$  sobre a região  $S$ , a metade superior de uma esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , de modo que o seu contorno é a circunferência  $C$  de raio  $a$  e centro na origem do plano  $xy$ .

**Solução:** As equações paramétricas de  $C$  são:

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = 0 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = 1, z = 0$$

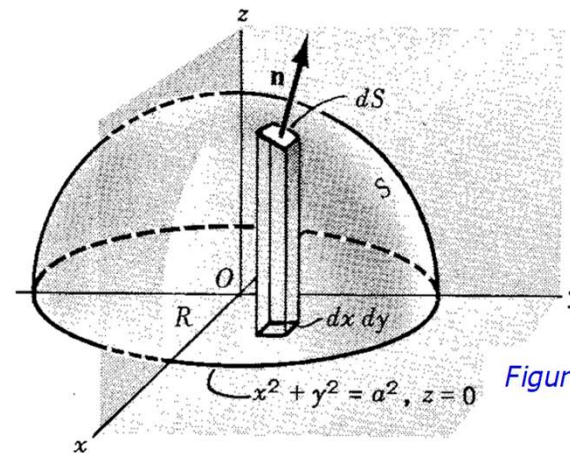


Figura 6 - Exemplo 12



## Exemplo Teorema de Stokes

Assim, um ponto pertencente à curva no instante  $t$  (uma volta:  $0 \leq t < 2\pi$ ) tem como vetor posição:

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r} = \oint_C \vec{A}(\vec{r}) \cdot \vec{r}'(t) dt$$

$$\vec{r}(t) = \langle \cos t, \sin t, 0 \rangle \Rightarrow \vec{r}'(t) = \langle -\sin t, \cos t, 0 \rangle$$

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \langle [2 \cos t - \sin t], [-\sin t (0)^2], [-\sin^2 t (0)] \rangle \cdot \langle [-\sin t], [\cos t], [0] \rangle dt$$

$$x^2 + y^2 = 1, z = 0$$

$$= \int_0^{2\pi} (2 \cos t - \sin t)(-\sin t) dt = 2 \int_0^{2\pi} \cos t d(\cos t) + \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt$$

$$\text{Como } \int \sin^2 x dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + C,$$

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r} &= 2 \left( \frac{\cos^2 t}{2} \right) \Big|_{t=0}^{2\pi} + \left( \frac{1}{2} t - \frac{1}{4} \sin 2t \right) \Big|_{t=0}^{2\pi} \\ &= 2 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{1}{2} (2\pi) - \frac{1}{4} (0) \right) = \pi \end{aligned}$$

Assim, um ponto pertencente à curva no instante  $t$  (uma volta:  $0 \leq t < 2\pi$ ) tem como vetor posição:

$$\vec{r}(t) = \langle \cos t, \sin t, 0 \rangle \Rightarrow \vec{r}'(t) = \langle -\sin t, \cos t, 0 \rangle$$

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r} = \oint_C \vec{A}(\vec{r}) \cdot \vec{r}'(t) dt$$

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \langle [2 \cos t - \sin t], [-\sin t (0)^2], [-\sin^2 t (0)] \rangle \cdot \langle [-\sin t], [\cos t], [0] \rangle dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (2 \cos t - \sin t) (-\sin t) dt = 2 \int_0^{2\pi} \cos t d(\cos t) + \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt$$

$$\text{Como } \int \sin^2 x dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + C,$$

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r} &= 2 \left( \frac{\cos^2 t}{2} \right) \Big|_{t=0}^{2\pi} + \left( \frac{1}{2} t - \frac{1}{4} \sin 2t \right) \Big|_{t=0}^{2\pi} \\ &= 2 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{1}{2} (2\pi) - \frac{1}{4} (0) \right) = \pi \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x - y & -yz^2 & -y^2z \end{vmatrix} = \vec{k}$$

$$\iint_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{n} ds \doteq \iint_S \vec{k} \cdot \vec{n} ds \doteq \iint_R dx dy$$

$$\iint_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{n} ds = \int_{x=-1}^1 \int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy dx = 4 \int_{x=0}^1 dx \int_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} dy = 4 \int_{x=0}^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

- Escolheu-se uma orientação da superfície  $S$  de acordo com a Regra da Mão Direita.
- Uma vez que  $R$  é a projeção de  $S$  no plano  $xy$ .

Usando a técnica (substituição trigonométrica) deduzida no exemplo 11,

$$\begin{aligned} \iint_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{n} ds &= 4 \left\{ \frac{(1)^2}{2} \left[ \left( \frac{\sqrt{(1)^2 - x^2}}{1} \right) \frac{x}{1} + \sin^{-1} \left( \frac{x}{1} \right) \right] \right\} \Bigg|_{x=0}^1 \\ &= 2 \left[ (\sqrt{1-x^2}) x + \sin^{-1} x \right] \Bigg|_{x=0}^1 = 2 \left[ \left( 0 \cdot 1 + \frac{\pi}{2} \right) - (0 + 0) \right] = \pi \end{aligned}$$

# Perguntas?

## Contato:



<http://lattes.cnpq.br/9510794972870727>



[@carloscatunda](#)



[carlos.catunda@cefet-rj.br](mailto:carlos.catunda@cefet-rj.br)

